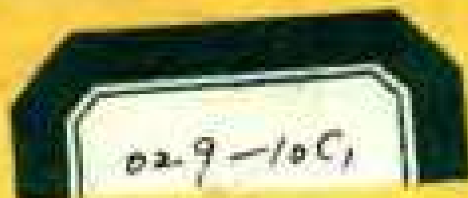


现代应用数学丛书

集合 拓扑 测度

〔日〕河田敬义 著





上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

集合·拓扑·测度

〔日〕河田敬义 著
赖 英 华 譯
夏 道 行 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店現代应用数学丛书之一的中譯本，以較少篇幅，扼要介紹集合論、拓扑空間、距离空間、測度論、勒贝格积分等現代数学中的基础理論，并附有习題，供高等院校师生、研究工作者以及工程师等参考。

現代应用数学丛书

集合·拓扑·測度

原书名 集合·位相·測度

原著者 〔日〕河田敬义

原出版者 岩波书店

譯者 赖英华

校者 夏道行

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

上海市印刷四厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 3 20/32　字数 83,000

1961年8月第1版　1961年8月第1次印刷

印数 1-16,000

統一书号：13119·408

定价：（十四）0.64元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

本书以較少篇幅讲述了集合、拓扑、測度三大内容，主要是針对这套丛书(岩波讲座，現代应用数学)的其他数学分支，例如泛函分析、微分方程、概率論等作为基础与工具而編写的。

作者在集合这一章里，基本上把集合理論中的重要概念和主要性质都作了叙述，特别是对"映象"分析較透。最后还引进了重要的 Zorn 公理。

第 2, 3 两章分别介紹拓扑空間和距离空間，除列举了有关的許多重要概念之外，还叙述了苏联数学家 П. С. Урысон 的引理和距离化定理 (1951 年苏联数学家 Ю. Смирнов 发表了比这更好的結果，参看关肇直編著拓扑空間概論)，Тихонов 的直积定理等。这些定理在理論研究和实际应用上都有很重要的价值。

占本书大半篇幅的是第 4, 5 章的測度和积分。作者在第 4 章中讲述了測度的基本概念和扩張定理等内容，而在第 5 章中，在和 Riemann 积分的对比下，叙述了 Lebesgue 积分及其三种定义方法，并指出利用第二种方法，即簡单函数的方法較为方便。此外，还介紹了应用非常广泛的 Lebesgue 控制收斂定理，Fubini 定理等。

本书的内容安排比較緊湊，尽量照顾到由特殊到一般来叙述，笔法簡洁而精练，几乎一切命題的証明只着重于讲述方法而不詳細推导。这可說是本书的特点，初学的讀者可能会感到困难，但可当作习題来做。全书在叙述中联系其他数学分支較少，也可能会使讀者感到不便。

本书是学习其他数学分支的基础，对于打算在較短时間内掌

握这些基础知識的讀者来說，本书是一本值得推荐的适宜的讀物。

本书譯竟，承楊从仁先生、夏道行先生审閱，提出了很多宝貴的意見，并增补了一些必要的注釋，特此致謝。

譯 者

目　录

第 1 章 集　合

§1 集合及其运算

集合的概念已成为现代数学最基本的概念。已經有集合論知識的讀者也許会想起基数（势）或序数的理論，但是作为数学这一門的最基本的集合論并不是指这些概念。

不論是讀者已学过的代数学和几何学，抑或是卽将要学的拓扑和測度理論，它們的完整体系都是先取集合 S，从而設定其元素及子集的性質和运算的公理来构成的。自然科学与数学的关系好比文学与語法的关系。文学的主体为思想而表現于文章，語法則說明文章的构造。自然科学的研究对象为实体，而可用数学将它表达出来。数学的对象是几乎完全抽象的东西，而我們主要的兴趣仅在于它們相互的結合。这个抽象东西就是集合。讀者也許在开始的时候有这样的印象：就是把极容易的东西，故意嘮嘮叨叨說得难懂。但希望把它看做学外国語文必須先学語法一样，剛开始学习时要有耐心。以下，用易懂的方法从集合論的叙述講起。

邏輯記号　$\neg A$ 表示否定，$A\&B$ 表示邏輯积（A 及 B），$A \text{ or } B$ 表示邏輯和（A 或者 B）。$A\Rightarrow B$ 表示含蓄(implication)，卽"有 A 就有 B"，$A\Leftrightarrow B$ 是等价(equivalence)記号，表示"$A\Rightarrow B\&B\Rightarrow A$"。此外

$$(\exists x)P$$

表示"存在着具有性質 P 的 x"，

$$(\forall x)P$$

則表示"对于所有 x 都有性質 P"。

所謂事物 a (不是字母 a)就是指用 a 来表示的对象。$a=b$ 意味着:关于 a 成立的性質,对于 b 也成立,而关于 b 成立的性質,对于 a 亦成立。所謂**集合** A 乃是可以互相区别的事物的汇集。构成集合 A 的事物 a 称为 A 的**元**(或称**元素** element)。当事物 a **属于** A (或者說**包含于** A)时,記作

$$a\in A,$$

否則就用 $a\overline{\in}A$ 表示。

在集合論中,所有其他的概念都可以由事物(元素)、集合和关系 $\in$ 引导出来。

1.1* 設有两集合 A, B, 如果 A 中的元与 B 中的元完全一致,也就是說: $a\in A\Leftrightarrow a\in B$ 的时候,表之为 $A=B$.

1.2* 一个元素也沒有的集合(这也认为是集合的一种)称为**空集**(empty set)。空集用 $\emptyset$ 表示。

当集合 A 含有元素 a, b, $\cdots$, c 时,写为

$$A=\{a,\ b,\ \cdots,\ c\}.$$

例如: $\{x\}$表示仅含一个元素 x 的集合,而$\{x,\ y\}$乃是由两个元素 x, y 所构成。

$\{x,\ y\}$ 与 $\{y,\ x\}$是同一集合的不同写法,故 $\{x,\ y\}=\{y,\ x\}$. 同样,$\{x,\ x\}=\{x\}$.

1.3* 当 $x\in A$ 时,称 x 为**变元**,而称 A 为 x 的**变域**。設 $P(x)$ 是关于 x 的命題,那么

$$B=\{x;\ x\in A,\ P(x)\}$$

乃表示:对于使命題 $P(x)$成立的所有属于 A 的 x 的全体。

1.4* 若 A 的所有元素都是 B 中元素,即: $a\in A\Rightarrow a\in B$, 此时称 A 为 B 的**子集**,記为

注:凡带有 * 記号者表示这一小段为定义(下同)。

$$A \subset B.$$

由此可知：(i)$\emptyset \subset A$，(ii) $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A$，(iii) $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \& (B \subset A)$，(iv) $(A \subset B) \& (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$。

1.5* 所謂 C 是 A, B 两集合之**和集**(或称**并集**)是指由 A 及 B 中的元素全体所构成的集合，即：$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ or $x \in B$，用記号

$$C = A \cup B$$

表示。

所謂 C 是 A, B 两集合之**交集**，意指 C 是由 A, B 共有元素所构成的集合，即：$x \in C \Leftrightarrow x \in A \& x \in B$. 用 $C = A \cap B$ 表示。

設 A, B 为两集合，并設集合 C 的所有元素都属于 A 但不属于 B，即：$x \in C \Leftrightarrow x \in A \& x \bar{\in} B$，这时称 C 为 A 与 B 的**差集**，記为

$$C = A - B.$$

1.6 对于集合 A, B, C, …, 有如下的性質：

交換律 $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;

結合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

吸收律 $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$.

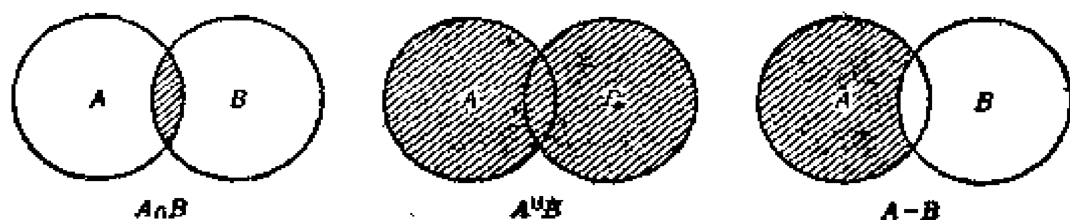


图 1.1

1.7* 集合的元素可以为任何事物，因此，以集合为元素而构成的集合(集合的集合)等也在考慮之列。在这样的意义下，我們

用$\mathfrak{P}(X)$表示以集合X的所有子集为元素而成的集合，并称$\mathfrak{P}(X)$为X的**幂集合**，記为

$$\mathfrak{P}(X)=\{A;\ A\subset X\}.$$

特别是$\emptyset$与X都属于$\mathfrak{P}(X)$。一般来讲，$\mathfrak{P}(X)$的子集$\mathfrak{A}$称为**集合族**。此外，对于$A\in\mathfrak{P}(X)$，称

$$A^c=X-A$$

为A的(关于X的)**补集**(complement)。

若$A,\ B\in\mathfrak{P}(X)$，則$A\cup B$及$A\cap B$也属于$\mathfrak{P}(X)$。除此以外，尙有下面等式成立：

1.8 de Morgan 公式

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c,\ A^{cc}=A,$$
$$A\cup A^c=X,\ A\cap A^c=\emptyset.$$

〔問題〕証明1.6, 1.8，并用图表示之。

1.9* 用$(a,\ b)$表示元素$a,\ b$的**序偶**。$(a,\ b)=(a',\ b')\Leftrightarrow a=a'\ \&\ b=b'$。

例如$(a,\ b)=(\{a\},\ \{a,\ b\})$，卽有上述的性質。

設$A,\ B$为两集合，称

$$A\times B=\{(a,\ b);\ a\in A,\ b\in B\}$$

为$A,\ B$的**直积集合**。它的**射影**pr (projection)定义为

$$pr_A:\quad A\times B\to A,\ pr_A(a,\ b)=a,$$
$$pr_B:\quad A\times B\to B,\ pr_B(a,\ b)=b.$$

如果$A_1\subset A,\ B_1\subset B$，就定义为

$$pr_A^{-1}(A_1)=A_1\times B,\ pr_B^{-1}(B_1)=A\times B_1,$$
$$pr_A^{-1}(A_1)\cap pr_B^{-1}(B_1)=A_1\times B_1.$$

設$A_1,A_2\subset A$而$B_1,B_2\subset B$，可証下面等式成立(試各以图解表明)：

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2),$$
$$(A_1\times B_1)^c=(A_1^c\times B)\cup(A_1\times B_1^c)=(A\times B_1^c)\cup(A_1^c\times B_1).$$

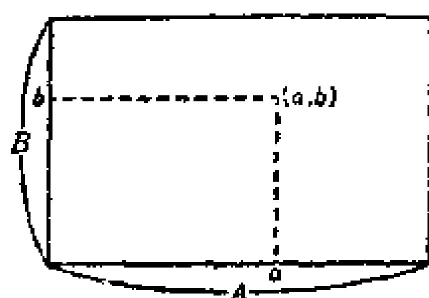


图 1.2

同样，用$(a, b, c, \cdots, f)=((\cdots((a, b), c), \cdots), f)$来定义元素$a, b, c, \cdots, f$的有序集。$(a, b, c, \cdots, f)=(a', b', c', \cdots, f')$ $\Leftrightarrow a=a', b=b', \cdots, f=f'$. 用

$A\times B\times\cdots\times C=\{(a, b, \cdots, c); a\in A, b\in B, \cdots, c\in C\}$

来定义集合$A, B, \cdots, C$的直积集合。

§2 映象(mapping)

2.1* 設有集合A, B。如果有一对应关系或法則存在，对于A的任一元a，有B中唯一的一元b与之对应，我們就称給出了一个从A到B的映象f，用

$$f: A\to B\ (\text{或 } A\xrightarrow{f}B)$$

表示，并写成$b=f(a)$. 此时称A为映象f的**定义域**(domain)，而

$$f(A)=\{f(a); a\in A\}\qquad(\subset B)$$

称为f的**值域**(range)。对应，函数，与映象同义。

2.2* 設有两映象f, g，$f=g$表示f的定义域A与g的定义域A完全一致，且对所有的$a\in A$皆有$f(a)=g(a)$. 如果映象$f: A\to B$，对于任意$a\in A$，都有$f(a)=b_0$，这里b_0为一个固定的元，则称f为以b_0为值的**常值映象**。若$A=B$，而且对于所有的$a\in A$，$f(a)=a$，則称f为A的**恒等映象**，用1_A来表示。

2.3* 設 $f: A\to B$，如果 $f(A)=B$，則称 f 为 A 到 B 上的映象(或称**完全映象**)。如果 $f(a)=f(a')\Rightarrow a=a'$，則称 f 为 **1-1 对应的映象**(或称**单調映象**)。若映象 $f: A\to B$ 是由 A 到 B 上的 1-1 对应的映象，則称 f 为**完全 1-1 对应的映象**(或称**完全单調映象**)。設 $f: A\to B$ 为完全 1-1 对应的映象，对于 $f(a)=b$，置 $a=f^{-1}(b)$ $(a\in A, b\in B)$，由是得出一个完全映象 $f^{-1}: B\to A$，称 f^{-1} 为 f 的**逆映象**。

2.4* 設映象 $f:A\to B$，$g:B\to C$，用 $h(a)=g(f(a))$ $(a\in A)$ 来定义映象 $h:A\to C$，这时称 h 为 f，g 的**結合**，記作

$$h=g\circ f.$$

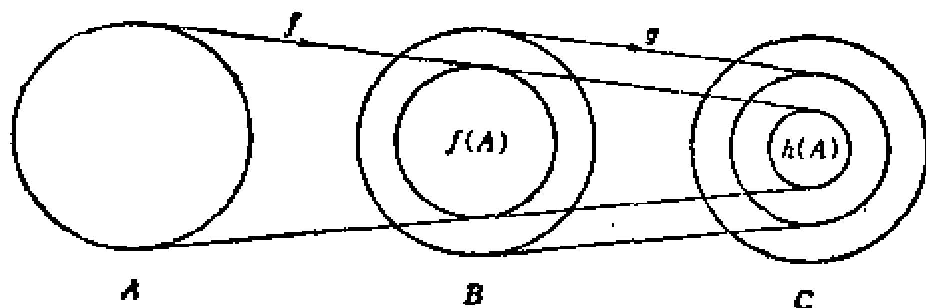


图　2.1

2.5 由上面定义可得：

(i) 結合律：$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D\Rightarrow h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

(ii) 設 f: $A\to B$ 为完全 1-1 的映象，則 $f^{-1}\circ f=1_A$，$f\circ f^{-1}=1_B$.

[問題] 由完全 1-1 的映象 $f:A\to A$ 全体构成的集合，按照上面的結合成群。这时，群的单位元为 1_A，f 的逆元为 f^{-1}。

2.6* 設 $A_1\subset A$，并有映象 $f:A\to B$，$g:A_1\to B$，如果对于所有的 $a_1\in A_1$，有 $f(a_1)=g(a_1)$，則称 f 为 g 的**扩大**，相对地来講，称 g 为 f 的**縮小**，記为

$$g=f\mid A_1.$$

設有映象 $f:A\to B$。作直积集合 $A\times B$ 的子集合

$$G(f)=\{(a, f(a)); a\in A\}$$

称 $G(f)$ 为 f 的图象。$E=G(f)$ 具有下面的性质:

(i) 对于所有的 $a\in A$, 存在着 $(a, b)\in E$ 的元素 (a, b);

(ii) 若 $(a, b)\in E$, $(a, b')\in E$, 则 $b=b'$.

反之, 如果 $E\subset A\times B$ 满足(i), (ii), 当 $(a, b)\in E$ 时, 置 $b=f(a)$, 这样就定义了一个映象 $f: A\to B$. 由此可見, 映象的概念在集合論中, 并不是新的概念, 可从具有性质 (i), (ii) 的 $A\times B$ 子集 E 引出来。

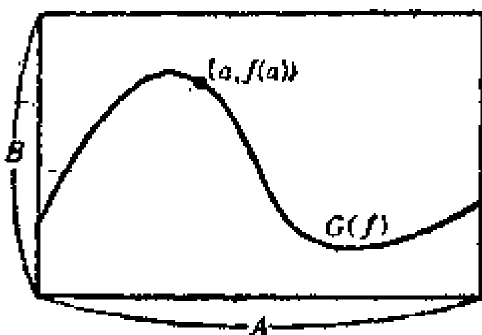


图 2.2

[問題] 試將2.2~2.6都用圖象来表示。

2.7* (多变元的映象) 用 $f(x_1, x_2,\cdots,x_n)=y(x_i\in X_i, i=1, 2,\cdots, n)$ 表示映象 $f: X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y$. 这时称 f 为 n 变元的映象。

2.8* 設已知一映象 $f: X\to Y$, 当 $A\in\mathfrak{P}(X)$ 时, 置

$$f(A)=\{f(a); a\in A\} \quad (\in\mathfrak{P}(Y)),$$

当 $B\in\mathfrak{P}(Y)$ 时, 置

$$f^{-1}(B)=\{b; f(b)\in B\} \quad (\in\mathfrak{P}(X))$$

(在这个定义中, f 是完全映象抑或完全 1-1 对应的映象, 那是无关紧要的)。于是, 由 $f: X\to Y$ 就引出了映象

$$f:\mathfrak{P}(X)\to\mathfrak{P}(Y) \quad \text{及} \quad f^{-1}:\mathfrak{P}(Y)\to\mathfrak{P}(X).$$

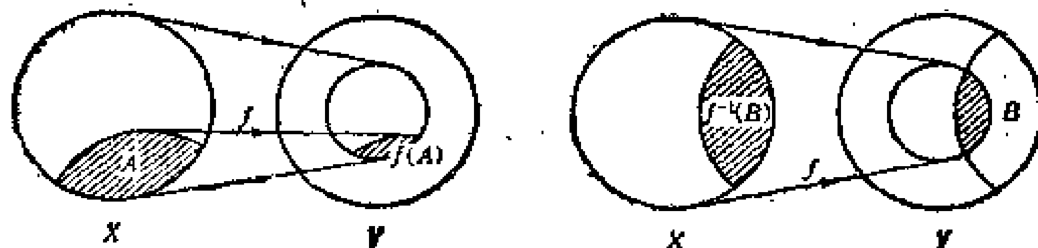


图 2.3

2.9 設 $A_1, A_2\in\mathfrak{P}(X)$, 則

$$A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2);\ f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2);$$

$$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2).$$

設 $B_1, B_2 \in \mathfrak{P}(Y)$，則

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B)^c$$ ❶.

［問題］1. 求証 2.9。

2. 試作 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ 的例子。

3. 求証 $A \subset f^{-1} \circ f(A)$，$f \circ f^{-1}(B) = B \cap f(X)$。

2.10* 設有映象 $f: \Lambda \to \mathfrak{P}(X)$，置

$$f(\Lambda) = \{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \quad (\subset \mathfrak{P}(X)) \quad (A_\lambda = f(\lambda)),$$

称 $f(\Lambda)$ 为以 Λ 为参变数的集合族，記

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x; (\exists \lambda \in \Lambda)(x \in A_\lambda)\} \quad (\in \mathfrak{P}(X)),$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x; (\forall \lambda \in \Lambda)(x \in A_\lambda)\} \quad (\in \mathfrak{P}(X)).$$

若　$\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$，則 $f(\Lambda) = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，以及

$$\bigcup_{\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

若 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，就有 $f(\Lambda) = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$，且

$$\bigcup_{\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

［問題］証明下列各公式

1. $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$，$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$。

2. 設 $f: X \to Y$，$A_\lambda \in \mathfrak{P}(X)$，則

$$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), \quad f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).$$

3. 設 $f: X \to Y$，$B_\lambda \in \mathfrak{P}(X)$，則

$$f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).$$

---

❶ 此处原书有誤，应为 $f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B_1)^c$。——校者注

~~026-10C,~~ 029-10C,

2.11* 設有两集合 A, B, 用記号

$$B^A$$

表示从 A 到 B 的所有映象 f 的全体。(如果映象 f 与它的图象 $G(f)\subset A\times B$ 等量齐观的話,那么 $B^A\subset\mathfrak{P}(A\times B)$.)

2.12* 設有集合族 $\{A_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ $(A_\lambda\in\mathfrak{P}(X))$, 用

$$P=\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \qquad (\subset X^\Lambda)$$

表示具有 $\lambda\in\Lambda$ 及 $f(X)\in A_\lambda$ 那样性質的映象 f 的全体, 卽: $\{f;f\in X^\Lambda, f(\lambda)\in A_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)\}$, 并称 $P=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 为 $\{A_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 的**无限直积集合**❶。P 的元素写成

$$\{a_\lambda;\ a_\lambda\in A_\lambda(\lambda\in\Lambda)\} \qquad (a_\lambda=f(\lambda)),$$

或

$$(\cdots,\ a_\lambda,\ \cdots).$$

特別是,当 $\Lambda=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$时,則置 $\prod\limits_{\Lambda}A_\lambda=A_1\times\cdots\times A_n$, 它的元素用$(a_1, \cdots, a_n)$表示。

其次,当 $\Lambda=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 时, 則有 $\prod\limits_{\Lambda}A_\lambda=\prod\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 它的元素一般写为$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ $(a_n\in A_n, n=1, 2, \cdots)$

对于无限直积集合❶ P 的任一元素 $f=\{a_\lambda;\ a_\lambda\in A_\lambda\}$, 以 a_λ 与之对应 $(f\to a_\lambda)$, 这样就得到了一个由 P 到 A_λ 的映象, 称它为射影,用 pr_λ 表示,卽 $pr_\lambda: P\to A_\lambda$.

2.13 設 $A\in\mathfrak{P}(X)$, 我們定义有如下性質的映象 c_A: $X\to\{0, 1\}$:

$$c_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\ 0 & (x\overline{\in} A),\end{cases}$$

称 c_A 为 A 的**特征函数**。

---

❶ 原书称 P 为无限直积集合是不妥当的,应改为"直积集合",因为Λ不必是无限的。下同。——校者注

[問題] 对于任一 $B\in\mathfrak{P}(X)$ 就有一个特征函数 $c_B(x)$ 与之对应，試建立 $\mathfrak{P}(X)$ 与 $\{0,1\}^X$ 的 1-1 对应关系。

§3 基数(势)

3.1* 所謂两个集合 A, B 等价(equivalent)是指从 A 到 B 存在着一个完全 1-1 的映象。A, B 等价时写成：$A\sim B$。

3.2 由等价定义，可証：

$A\sim A$; $A\sim B\Rightarrow B\sim A$; $A\sim B\ \&\ B\sim C\Rightarrow A\sim C$。

3.3* 对于集合 A，我們附以所謂基数(cardinal number 或称势)与它对应。A 的基数用 $\overline{\overline{A}}$ 或用德文字母 $\mathfrak{M}$ 来表示。当 $A\sim B$ 时，集合 A, B 称为有同一基数，用 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 表示。

3.4* 用 $I=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

表示自然数全体的集合。凡与 I 等价的集合，称为可数(countable)集合。集合 A 为可数的充要条件是：A 可表示成 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。如果集合 A 有限或可数，就称它为充其量可数。

3.5 設集合 A, B 为可数，那么 $A\cup B$, $A\times B$ 也可数。又映象 $f:A\to X$ 的象集合 $f(A)$ 为充其量可数，可是 $\mathfrak{P}(A)$ 并非可数。

証明 (i) 設 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, $B-A=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$ (因 A, B 为可数，故 $B-A$ 为充其量可数，所以可写成如是的形式)，而 $C=A\cup B=A\cup(B-A)=\{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\}$。于此，若置 $c_{2n-1}=a_n$, $c_{2n}=b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$❶，则 C 为可数集合，卽 $A\cup B$ 为可数。

(ii) 設 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots\}$，我們只要置 $c_n=(a_i, b_{k-i})$ $(i<k, n=1+2+\cdots+k-1+i)$，那末 $A\times B$ 可写成

---

❶ 此处 $B-A$ 可能为有限集，因此，这里应改为："于此，当 $B-A$ 为无限集时，若置 $c_{2n-1}=a_n$, $c_{2n}=b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，当 $B-A$ 有 m 个元素时，置 $c_1=b_1, \cdots, c_m=b_m$, $c_{m+n}=a_n$。"——校者注

$C=A\times B=\{c_1, c_2, \cdots\}$，由是可知 $A\times B$ 为可数。

(iii) 按照映象的定义易知 $f(A)$ 为无其量可数。

(iv) 最后証 $\mathfrak{P}(A)$ 不是可数集合。若 $\mathfrak{P}(A)$ 为可数集合，则存在着一个完全 1-1 映象 $f:A\to\mathfrak{P}(A)$，而 A 与 $\mathfrak{P}(A)$ 为等价。現設 $B=\{x; x\in A, x\overline{\in}f(x)\}$。因 $B\in\mathfrak{P}(A)$，故存在一个 b 使得 $f(b)=B$。如果 $b\in B$，則由 B 的定义知 $b\overline{\in}f(b)=B$，所以 $b\in B$ 为不可能。如果 $b\overline{\in}B$，則 $b\in f(b)=B$，故 $b\overline{\in}B$ 也是不可能，得出了矛盾，由此可見 $\mathfrak{P}(A)$ 不是可数集合。　　証畢

3.6 整数全体的集合 Z，有理数集合 Q 都是可数集合。实数集合則不可数。

証明 整数集合可以看作是正整数集合、負整数集合与 $\{0\}$ 的和集，因此它为可数。

有理数（除 0 外）可表成 b/a $(a\in I, b\in Z)$，而 b/a 对应着 (a, b) $(a\in I, b\in Z)$。根据 3.5 知 $I\times Z$ 为可数。所以 Q 为可数。

$[0, 1]$ 中之实数可用无限 2 进位数来表示，由此可知 $[0, 1]$ 与 $\{0, 1\}^I$（卽是从 I 到 $\{0, 1\}$ 的映象的全体）除去一个可数集合外等价。但 $\{0, 1\}^I$ 为不可数。故 $[0, 1]$ 为不可数。由此可知实数集不可数。

基数的大小，加法，乘法以及基数的幂，在本书沒有用到，說明从略。

§4 关　系

作 A, B 的直积集合 $A\times B$。如果 R 为 $A\times B$ 的任一已給子集合，則 R 用下面的方法規定了 A, B 之間的关系(relation)，卽是：

$$\begin{cases} \text{当 } (a, b)\in R \text{ 时，} & a\sim_R b; \\ \text{当 } (a, b)\overline{\in}R \text{ 时，} & a\not\sim_R b. \end{cases}$$

由此可見，依照映象 $f:A\to B$ 的图象 $G(f)$ $(\subset A\times B)$ 能够定 A, B 的关系。

现在，当 $R\subset A\times B$ 时，置

$$R'=\{(b, a); (a, b)\in R\} \quad (\subset B\times A).$$

此外，当 $R_1\subset A\times B$, $R_2\subset B\times C$ 时，置

$$R_1\circ R_2=\{(a, c); \exists b\in B, (a, b)\in R_1 \ \& (b, c)\in R_2\}\subset A\times C.$$

其次，当 $A=B$ 时，以

$$\Delta=\{(a, a); a\in A\} \qquad (\subset A\times A)$$

表示对角綫集合。

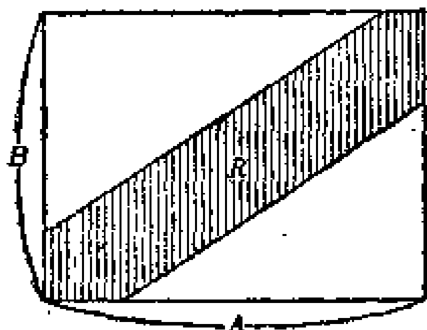


图 4.1

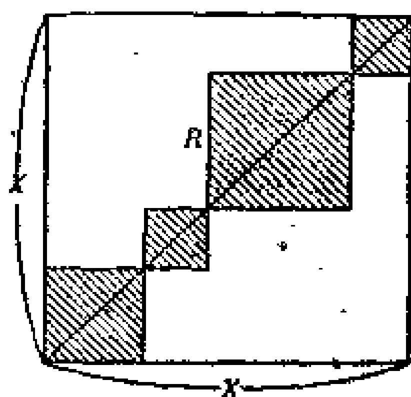


图 4.2

4.1* 所謂在集合 X 上定义了**等价关系** $\sim$，意指 X 与 X 之間关系有下面条件成立：

(i) **反射律** 对于所有的 $a\in X$，有 $a\sim a$;

(ii) **对称律** $a\sim b\Rightarrow b\sim a$;

(iii) **推移律** $a\sim b \ \& \ b\sim c\Rightarrow a\sim c$.

如果 X 与 X 之間依照 $X\times X$ 的子集合 R 来規定等价关系 $\sim$，那么可推出 R 有如下的性質：(i) $\Delta\subset R$, (ii) $R=R'$, (iii) $R\circ R\subset R$ (参看图 4.2)。

4.2* 所謂集合 X 的**分割**(partition)，意指集合族 $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{P}(X)$ 滿足下列条件：

(i) $A, B\in\mathfrak{A}\Rightarrow A=B$ or $A\cap B=\emptyset$,

(ii) $\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A=X$.

4.3 当集合 X 的分割 $\mathfrak{A}$ 为已給的时候，如果

$$a\sim b \Leftrightarrow a \text{ 与 } b \text{ 属于同一集合 } A(\in\mathfrak{A}),$$

則 X 得到了等价关系。反之，任意等价关系，可定出 X 的分割。

証明　定理的前半段，对于 4.1 的(i)，(ii)，(iii)等条件，不言而喻是满足的。只要証明定理的后半部。每一个 $a\in X$，置 $A_a=\{b;a\sim b\}$ 及 $a\in A_a$；則有 $A_a=A_b\Leftrightarrow a\sim b$； $A_a\cap A_b=\emptyset\Leftrightarrow a\nsim b$。由此可見，$\mathfrak{A}=\{A_a;a\in X\}$ 就是由等价关系 $\sim$ 定出的分割。　証毕

我們把对应于等价关系 $\sim$ 的 X 分割 $\mathfrak{A}$ 也看作为一集合，并称这集合是由 X 按照 $\sim$ 而得到的**商集合**(quotient set)，表示为

$$\mathfrak{A}=X/\sim.$$

对于任意一 $x\in X$，$f:x\to A_x\in\mathfrak{A}$ 是从 X 到 $\mathfrak{A}$ 上的映象，称这映象为**完全正規映象**。

現在来討論如下的另外一种关系。

4.4* 所謂在集合 X 上定出了的**次序关系** $\leqslant$，意思就是說：X 与 X 之間的关系满足下列条件：

(i) 对所有的 $a\in X$，有 $a\leqslant a$；

(ii) $a\leqslant b$ & $b\leqslant a\Rightarrow a=b$；

(iii) $a\leqslant b$ & $b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$。

如果，从 $X\times X$ 的子集合 R 定出 $\leqslant$，則有 (i) $\Delta\subset R$，(ii) $R\cap R'=\Delta$，(iii) $R\circ R\subset R$。

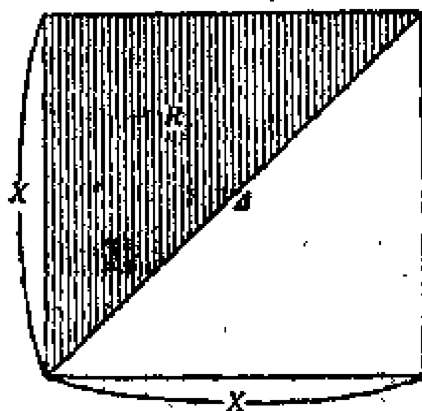


图 4.3

如果集合 X 有次序关系 $\leqslant$，則称該集合为**有序集合**(ordered set)，記为$(X,\leqslant)$。

例 1　自然数全体 I，整数全体 Z，实数全体 R 等是以大小关系成有序集合。

例 2　在 $\mathfrak{P}(X)$ 中，若 $A\leqslant B\Leftrightarrow A\subset B$，則 $\mathfrak{P}(X)$是有序集合。

例 3　設 X 为有序集合，Y 为任意集合，如果 $f,g\in X^Y$，$f\leqslant g\Leftrightarrow$ (所有

的 $y\in Y$ 有 $f(y)\leqslant g(y)$），則 X^Y 也是一有序集合。

4.5* 設有序集合 $(X, \leqslant)$。如果 X 中有一个元素 a_0，对于所有的 $a\in X$，都有 $a\leqslant a_0$，則称 a_0 为 X 的**最大元素**。如对所有的 $a\in X$，都有 $a_0\leqslant a$，則称 a_0 为 X 的**最小元素**。

設有一个 $b_0\in X$，如对于任一 $a\in X\,(a\neq b_0)$，不可能有 $b_0\leqslant a$，則称 b_0 为 X 的一个**极大元素**。反之，对任一 $a\in X\,(a\neq b_0)$，如不可能有 $a\leqslant b_0$，則称 b_0 为 X 的一个**极小元素**。

如 X 有最大元素(最小元素)，則只能有一个。可是 X 的极大元素(或极小元素)存在的时候，可以不止一个而有許多个。

設 A 为有序集合 $(X, \leqslant)$ 的子集合，当 $A\leqslant x$ (卽对所有的 $a\in A$，皆有 $a\leqslant x$)时，称 x 为 A 的一个**上界**。当 $x\leqslant A$ 时，就称 x 为 A 的一个**下界**。

設 A 至少有一个上界(下界)，并且在 A 的所有上界(下界)构成的集合中，如果存在着最小元素 a_0，則称 a_0 为 A 的**上确界**(**下确界**)，記为

$$a_0=\sup A \qquad (a_0=\inf A).$$

4.6* 如果有序集合 $(X, \leqslant)$ 滿足下列的条件:

(iv) 对任意 $a, b\in X$，$a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$ 中至少有一种情形成立，这时称 $(X, \leqslant)$ 为**綫性有序集合** (linearly ordered set) (如果按照 $R\subset X\times X$ 而規定 $\leqslant$，則由(iv)就得出 $X\times X=R\cup R'$)。

例如，上面的例1是綫性有序集合，但例2、例3則不是了。

4.7* 有序集合 $(X, \leqslant)$ 称为**归納的** (inductive)，意指：如 A 为 X 的任一綫性有序子集合(对 X 的序而言)，則在 X 中必有 $\sup A(\in X)$。

例 設有集合 X，而 $\mathfrak{F}\in\mathfrak{P}(X)$ 是一个濾透(filter)，所謂濾透就是 $\mathfrak{F}$ 滿足下列三条件:

(i) $F_1, F_2\in\mathfrak{F}\Rightarrow F_1\cap F_2\in\mathfrak{F}$;

(ii) $F_1 \in \mathfrak{F}$, $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}$;

(iii) $\emptyset \bar{\in} \mathfrak{F}$.

現置 $F = \{\mathfrak{F}; \mathfrak{F} \in \mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{F}$ 是深透$\}$，卽 F 是所有深透的全体所构成的集合，如果 $\mathfrak{F}_1 \leqslant \mathfrak{F}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$，那么 F^*是一个归納的有序集合。

証明　設 $A(\subset F)$是綫性有序集合，那么 $\mathfrak{F}_0 = \bigcup_{\mathfrak{F} \in A} \mathfrak{F}$ 也是一深透，显然 $\mathfrak{F}_0 = \sup A$。　証毕

4.8*　在代数系中有一种所謂格(lattice)的次序关系。設 L 为有序集合，并且满足下列条件：

(i) 对任意的 $x, y \in L$，存在着 $z = \sup\{x, y\}$，换句話說：(a) $z \geqslant x$, $z \geqslant y$，(b)对任意的 z'，如 $z' \geqslant x$, $z' \geqslant y$，則有 $z' \geqslant z$。

(ii) 对任意的 $x, y \in L$，存在着 $w = \inf\{x, y\}$，卽 (a)$z \leqslant x$, $z \leqslant y$，(b)若任意 z'，而 $z' \leqslant x$, $z' \leqslant y$，則有 $z' \leqslant z$。

这时，称 L 为格，記为

$$z = x \cup y, \quad w = x \cap y,$$

称 z 为 x 与 y 的結(join)，w 为 x 与 y 的交(meet)。

例 1　实数集合 R，置 $a \cup b = \max(a, b)$，$a \cap b = \min(a, b)$，則 R 就是格。

例 2　$\mathfrak{P}(X)$是一个格，集合的运算 $A \cap B$, $A \cup B$, $(A, B \in \mathfrak{P}(X))$ 看作是格的运算。

例 3　設 $F = R^X$ (X 为任意集合)，$f, g \in F$，置 $f \leqslant g \Leftrightarrow$ (所有的 $x \in X$, $f(x) \leqslant g(x)$) (4.4*例 3)并且

$$(f \cup g)(x) = \max(f(x), g(x)); \quad (f \cap g)(x) = \min(f(x), g(x)),$$

那么 F 就是格。

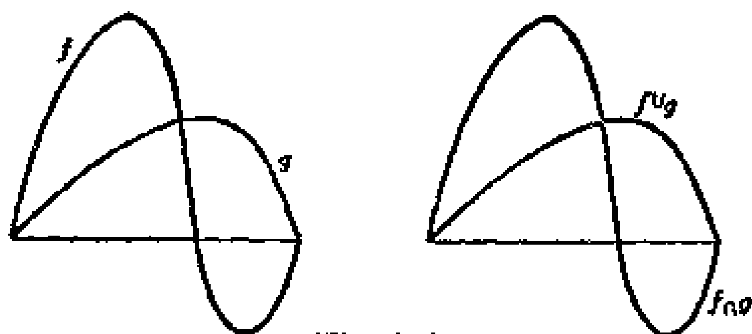


图　4.4

§5 Zorn 公理

以上虽然从朴素的立場叙述了集合論的一部分內容，但是为了更进一步展开理論，就必須有下面的一些公理。

在这些公理中，有所謂 Cantor "**整列可能的公理**"，意思就是說："对于任一集合 X，可以定出适当的次序关系，使任意子集合 $A(\subset X)$ 皆有最小元素"。其次就是 Zermelo 的"**选擇公理**"，那就是說："設有集合族 $\mathfrak{A}=\{A_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$，而 $A_\lambda\neq\emptyset$，則直积集合 $A=\prod\limits_\lambda A_\lambda\neq\emptyset$"。选擇公理是与整列公理等价的。Zorn 作出了与这些公理等价的下述命題❶，这个命題在实际上容易应用，称为 Zorn 公理。

5.1 Zorn 公理 如有序集合 $(X,\ \leqslant)$ 是归納的，則至少必有一个极大元素。

例 1 設 $\mathfrak{F}_0$ 为集合 X 上的一个深透，則至少有一个包含 $\mathfrak{F}_0$ 的极大元素存在。

証明 考虑包含 $\mathfrak{F}_0$ 的所有深透的全体 F_0，按照 §4, 4.7 例題知 F_0 是归納的。因此按照 Zorn 公理知 F_0 有极大元素存在。 証畢

例 2 让我們来証明在任一向量空間 V 中必有基底存在。所謂 $\{x_\lambda;\lambda\in\Lambda\}(\subset V)$ 是 V 的基底，意指：(i) 任意有限个 $x_{\lambda_1},\cdots,x_{\lambda_n}$ 綫性无关，(ii) 对任意 $y\in V$，可以适当选取有限个 $x_{\lambda_1},\cdots,x_{\lambda_k}$，使得 $y=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_{\lambda_i}$ (a_i 为实数)。

首先，設 V 的任意子集合 $U=\{u_\mu;\ \mu\in u\}$，在其中任意有限个 $u_{\mu_1},\cdots,u_{\mu_n}$ 为綫性无关，用 $\mathfrak{A}$ 表示所有这样的 U 的全体。当 $U_1,\ U_2\in\mathfrak{A}$，而 $U_1\subset U_2$ 时，定义 $U_1\leqslant U_2$，則 $\mathfrak{A}$ 显然是归納的有序集合。按照 Zorn 公理，$\mathfrak{A}$ 有极大元素 $U_0=\{u_\mu\}$ 存在，容易驗証 U_0 就是 V 的一个基底。

---

❶ 以上三公理是等价的証明，参看卷末文献，[1] 或 [6] (p. 32-33)。

第 2 章 拓扑空間

第一章只就一般的集合作了叙述；本章將討論定义了拓扑的集合。拓扑理論是 G. Cantor 为在 Euclid 空間的集合（即点集合）而創立的。現在使用拓扑理論的大致有：

(i) 使用于与 Euclid 空間点集合性质有关的場合[如微积分(見高木貞治著解析概論第一章)及函数論中所应用的]。

(ii) 使用于与函数空間关联在一起的場合，如 Hilbert 空間論及广义函数論方面。

(iii) 使用于 Riemann 面，Lie 群，一般以几何为对象的流形体方面。其中(i)是最直觀的，因而在理解上不会发生困难。(ii)主要使用距离空間的理論，所以一般不需要更細致的理論。(iii)是最特殊的对象。虽然拓扑理論的应用方面不同，但内容上并沒有什么变化，因此可把它总括起来作为拓扑空間理論来进行論述。讀者可隨时联系最直觀并最容易理解的 Euclid 空間图形来理解。这一理論是过渡到另一些理論的阶梯，所以定义很多，而相形之下，結論較少。假若在集合論的基础上，进而对抽象的拓扑概念的研究能引起兴趣，那就很好。本书因篇幅限制，有些地方不能作詳細的証明，希望在閱讀时对这些地方加以补足。

§6 Euclid 空間

在 Euclid 空間 $E^{(n)}$ 中，作正交坐标系，使点 $P\in E^n$ 与坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对应，由是集合 $E^{(n)}$ 与

$$R^n=R\times R\times\cdots\times R\quad(n\text{ 个})$$

等价。这里 R 是实数集合。既然 $E^{(n)}$ 与 R^n 等价，故可把它們等

量齐观。R^n 中的点用 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 等来表示。R^n 中任意两点 x, y 的距离 $\rho(x, y)$ 定义为

$$\rho(x, y)=\{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\}^{1/2}.$$

显然，$\rho(x, y)$ 具有下面的性质：

MI　对于任意 x, y 有 $\rho(x, y)\geqslant 0$，$\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$。

MII　$\rho(x, y)=\rho(y, x)$。

MIII　$\rho(x, y)+\rho(y, z)\geqslant\rho(x, z)$（三角形不等式）。

在 Euclid 空間中，許多性質都可由这个距离函数 $\rho(x, y)$ 引出来。在这里，我們給以一般定义如下：

6.1*　設有一集合 X，如果在其中定义了一个距离函数(metric) $\rho(x, y)$（即映象 $\rho(x, y): X\times X\to R$），满足 MI, MII, MIII，則称 X 为**距离空間**，記为

$$(X, \rho).$$

例1　在实数 R 中，置 $\rho_1(a, b)=|a-b|(a, b\in R)$，那么 (R, ρ_1) 是距离空間。

例2　n 維 Euclid 空間 (R^n, ρ_n) 是距离空間。

例3　設 A 为距离空間 (X, ρ) 的子集合，如果置 $\rho_A=\rho|A\times A$（即对 $a, b\in A$，有 $\rho_A(a, b)=\rho(a, b)$），那么 (A, ρ_A) 也是距离空間。

例4　設 (X, ρ_X)，(Y, ρ_Y) 都是距离空間，$Z=X\times Y$，如果置 $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\{\rho_X(x_1, x_2)^2+\rho_Y(y_1, y_2)^2\}^{1/2}$，則 (Z, ρ) 也是距离空間。

例5　設 (X, ρ_X) 为距离空間，Y 为任意集合，对于 $f, g\in X^Y$ $(Z=X^Y)$ 置 $\rho(f, g)=\sup\{\rho_X(f(y), g(y)); y\in Y\}$，那末 (Z, ρ) 也是距离空間。

例6　(Hilbert 空間)　設 $X=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots); x_n\in R, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2<+\infty\}$，对于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in X$，定义它的距离为

$$\rho_2(x, y)=\{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\}^{1/2},$$

那么 (X, ρ_2) 是距离空間，用 $l^{(2)}=(X, \rho_2)$ 表示。以后可以看到，$l^{(2)}$ 是一个(可分的) Hilbert 空間。

例7　任意集合 X，如果置 $\rho(x, x)=0$，$\rho(x, y)=1(x\neq y)$，則 (X, ρ) 也是距离空間。

其他距离空間的例子,参看 §16。

在距离空間中,可以定义收斂、极限、連續等概念。定义这些概念虽然有各种各样的方法,但本书采用以邻域及开集概念作为基础的方法。

6.2* 在距离空間 (X, ρ) 中,对于 $x\in X$, $\varepsilon>0$, 置

$$V(x, \varepsilon)=\{y;\ y\in X,\ \rho(x, y)<\varepsilon\},$$

那么 $V(x, \varepsilon)$ 为 X 的子集合,我們称它为 x 的 ε 邻域 (neighborhood)(或称近傍)。x 的 ε 邻域的全体用 $\mathfrak{B}(x)=\{V(x, \varepsilon);\ \varepsilon>0\}$ 表示。

$\mathfrak{B}(x)$ 具有下列性质:

V I $x\in X, V\in\mathfrak{B}(x)\Rightarrow x\in V$.

V II 設 $V_1, V_2\in\mathfrak{B}(x)$, 可适当选取 $V_3\in\mathfrak{B}(x)$, 使得

$$V_3\subset V_1\cap V_2.$$

V III 設 $V\in\mathfrak{B}(x)$, $y\in V$, 则存在着 $V_y\in\mathfrak{B}(y)$, 使得

$$V_y\subset V.$$

証明 V I 不言而喻。

V II 設 $V_1=V(x, \varepsilon_1)$, $V_2=V(x, \varepsilon_2)$, 只要取 $V_3=V(x, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ 就有 $V_3\subset V_1\cap V_2$.

V III 設 $V=V(x, \varepsilon)$, $\rho(x, y)=\varepsilon_1<\varepsilon$, 而 $V_y=V(y, \varepsilon-\varepsilon_1)$ 就是所求的。 証毕

6.3* 設 (X, ρ) 为距离空間,所謂 $U(\subset X)$ 是 $x(\in X)$ 的邻域,意指:存在一个 $\varepsilon>0$, 而

$$x\in V(x, \varepsilon)\subset U.$$

x 的邻域 U 的全体記为 $\mathfrak{U}(x)$, $\mathfrak{U}(x)$ 具有如下的性质:

UI 設 $x\in X$, $U\in\mathfrak{U}(x)$, 则 $x\in U$.

UII 若 $U_1\in\mathfrak{U}(x)$, $U_1\subset U_2$, 则 $U_2\in\mathfrak{U}(x)$.

UIII 若 $U_1, U_2\in\mathfrak{U}(x)$, 则 $U_1\cap U_2\in\mathfrak{U}(x)$.

UIV 对于 $U\in\mathfrak{U}(x)$，可取 $V\in\mathfrak{U}(x)$，$V\subset U$，使对所有的 $y\in V$ 皆有 $U\in\mathfrak{U}(y)$。

証明 从满足 VI, VII, VIII 条件的 $\mathfrak{B}(x)=\{V(x,\varepsilon);\varepsilon>0\}$ 可导出 UI～UIV。例如証明 UIV，只要取 $V=V(x,\varepsilon)$，$x\in V\subset U$，并参照性质 VIII 就可以了。 証毕

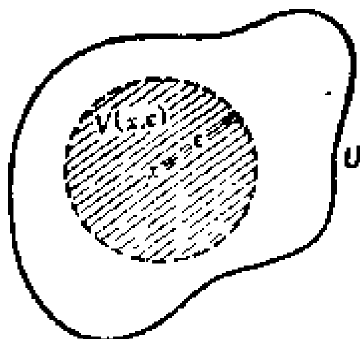


图 6.1

以上，从 Euclid 空間出发定义了距离空間，从而导出了邻域系的性質。更进一步，就是根据邻域系的性質来研究拓扑的性質。虽然有几个概念都可以作为叙述拓扑性質的基础，但在这里先从邻域系方面着手。

§7 拓扑空間

7.1* 在集合 X 中，如果对于每一个 x，定义了一个集合族 $\mathfrak{U}(x)(\neq\emptyset)$，并且满足 6.3* UI, UII, UIII, UIV 諸条件，则称 $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}(x);x\in X\}$ 为**邻域系**，而称 $U\in\mathfrak{U}(x)$ 为 x 的**邻域**。当我們把 X 与 $\mathfrak{U}$ 合并考虑的时候，称它为**拓扑空間**(topological space)，記为

$$(X,\mathfrak{U}),$$

或称为由 $\mathfrak{U}$ **規定的 X 的拓扑**。如果 $x\in X$，则称 x 为 X 的**点**。

例 1 設 (X,ρ) 为距离空間，又設 $\mathfrak{U}_\rho(x)$ 为依照 6.3* 定义的邻域系，则 $(X,\mathfrak{U}_\rho)$ 为拓扑空間。

例 2 对于集合 X，置 $\mathfrak{U}(x)=\{U;x\in U\subset X\}$，则 X 是拓扑空間，本例題与 §6 的例 7 互相对应。

例 3 对于集合 X，若置 $\mathfrak{U}(x)=\{X\}$，则它也是拓扑空間。

7.2* 設 $(X,\mathfrak{U})$ 是拓扑空間，对于任意子集合 $E(\subset X)$，

(i) 若 E 是 x 的邻域，则称 x 为 E 的**内点**。

(ii) 若 $E^c=X-E$ 为 x 的邻域，則称 x 为 E 的外点。

(iii) 如 x 既不是 E 的內点，也不是 E 的外点（卽 x 的任一邻域与 E 及 E^c 都相交），則称 x 为 E 的界点。

E 的內点的全体称为 E 的內部（或称开核），用 E^i 或 E° 表示。

E 的外点的全体称为 E 的外部，用 E^e 表示。

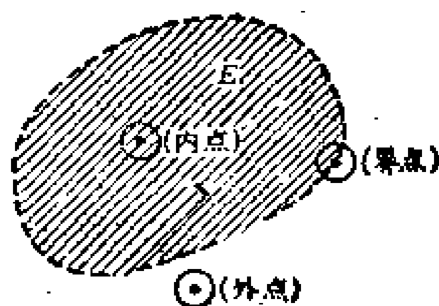


图 7.1

E 的界点的全体称为 E 的边界 (boundary)，用 E^f 表示。

$\overline{E}=E^\circ \cup E^f$ 称为 E 的閉包 (closure)。

由上面定义，立卽得出：

$E^\circ \subset E \subset \overline{E},\ E^e=(E^c)^\circ,\ E^f=(E^c)^f$.

7.3* 当 $E=E^\circ$，卽任意 $x\in E \Rightarrow E\in \mathfrak{U}(x)$ 时，称 E 为开集 (open set)。

設 $$\mathfrak{O}(X)$$ 为拓扑空間 $(X,\mathfrak{U})$ 的所有开集 $O(\subset X)$ 的全体，那么有下列性質：

OI $\quad X\in\mathfrak{O}(X),\ \emptyset\in\mathfrak{O}(X)$.

OII $\quad O_1, O_2\in\mathfrak{O}(X)\Rightarrow O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}(X)$.

OIII $\quad O_\lambda\in\mathfrak{O}(X)\ (\lambda\in\Lambda)\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathfrak{O}(X)$.（这里 Λ 可以具有任意基数。）

証明 OI 显然是正确的，至于 OII，OIII，分别可由 UIII 及 UII 导出来。 **証毕**

7.4 对于任意 X 的子集合 E，E° 是 E 中 $(E^\circ\subset E)$ 最大的开集。

証明 (i) 設 $x\in E^\circ$，$E=U(\in\mathfrak{U}(x))$，取滿足条件 UIV 的

V。因为对所有的 $y\in V$ 皆有 $U\in\mathfrak{U}(y)$，由此可見，$U\in\mathfrak{U}(y)$，所以 $V\subset E^\circ$，也就是說 E° 是开集。

(ii) 現在設 $O\in\mathfrak{O}(X)$ 及 $O\subset E$，对于 $x\in O$ 就有 $O\in\mathfrak{U}(x)$，所以 $E\in\mathfrak{U}(x)$。由此可見，$O\subset E^\circ$。 証毕

［問題］設 $A,B\subset X$，求証 (i) $X^\circ=X$，(ii) $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$，(iii) $A^\circ\subset A$，(iv) $A^{\circ\circ}=A^\circ$。

7.5* 当 $E=\overline{E}$ 时，称 E 为**閉集**(closed set)。$E=\overline{E}$ 这一条件与

$$E=E^\circ\cup E^f\Leftrightarrow E^c=E^e\Leftrightarrow E^c=(E^c)^\circ$$

等价，亦即与 E^c 为开集等价。

拓扑空間$(X,\mathfrak{U})$的所有閉集 $A(\subset X)$的全体，用

$$\mathfrak{A}(X)$$

来表示，它具有下面的性質：

AI $X\in\mathfrak{A}(X)$，$\emptyset\in\mathfrak{A}(X)$。

AII $A_1,A_2\in\mathfrak{A}(X)\Rightarrow A_1\cup A_2\in\mathfrak{A}(X)$。

AIII $A_\lambda\in\mathfrak{A}(X)\ (\lambda\in\Lambda)\Rightarrow\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathfrak{A}(X)$。

証明 設 $A\in\mathfrak{A}(X)$，則 $A^c=O\in\mathfrak{O}(X)$，因此 AI, AII, AIII 可由 OI, OII, OIII 导出来。 証毕

7.6 对于任意 X 的子集 E，$\overline{E}$ 是含有 $E(E\subset\overline{E})$ 的最小閉集。

証明 (i) 从 $E^e=(E^c)^\circ$ 是开集，得出 $\overline{E}=(E^c)^c$ 为閉集。

(ii) 設 $E\subset A$，$A\in\mathfrak{A}(X)\Rightarrow E^c\supset A^c$，$A^c\in\mathfrak{O}(X)$，由此 $A^c\subset(E^c)^\circ=E^e$，所以，$A\supset(E^e)^c=\overline{E}$。 証毕

［問題］对于 $A,B\subset X$，有 (i) $\overline{\emptyset}=\emptyset$，(ii) $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cup\overline{B}$，(iii) $A\subset\overline{A}$，(iv) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$。

7.7* 所謂点 x 是 $E(\subset X)$的**聚点**(或**集积点**)，意指，x 的任一鄰域至少含有 E 中除 x 本身外的一个点。E 的聚点全体所成的

集合，称为 E 的**导集**，用 E^d 表示。

［問題］ 証 $\overline{E}=E\cup E^d$.

7.8* 設 $x\in E(\subset X)$，如果存在一个 $U\in\mathfrak{U}(x)$ 使得

$$E\cap U=\{x\},$$

则称 x 为 E 的**孤立点**。

图 7.2

所謂 E 为**完全集**，是指：E 是閉集合，而且 E 中沒有孤立点。

［問題］ 証 E 是完全集的必要与充分条件为：$E=E^d$.

7.9* 如果 $\overline{E}=X$，称 $E(\subset X)$ 为**处处稠密集合**。

如果 $(\overline{E})^\circ=\emptyset$，称 $E(\subset X)$ 为**疏集合**。

［問題］ 設 E_1，E_2 是疏集合，那么 $E_1\cup E_2$ 亦是疏集合，試証明之。

例 1 設 $X=R$，Q 为有理数集合，則 Q 为处处稠密集合。

例 2 設 $X=R$，則 Cantor 集合 C 不但完全而且是疏集合。这里所謂 Cantor 集 C，是指：

$$C_1=[0,1/3]\cup[2/3,1],$$

$$C_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1],\cdots,$$

$C_n=\bigcup_i[i/3^n,(i+1)/3^n]$（在这里，$i$ 跑遍 $\varepsilon_0 2+\varepsilon_1(2\times3)+\cdots+\varepsilon_{n-1}(2\times3^{n-1})$（$\varepsilon_i=0$ 或 1）的全体），…

置

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n,$$

这就是 Cantor 集合。



图 7.3

設 E 为 X 的子集合，如果 E 可表示为充其量可数个疏集合之和，那么称 E 为**第 1 类集合**（或称**第 1 綱**，set of the first category）。不是第 1 类集合的集合称为**第 2 类集合**（或称**第 2 綱**）。

7.10* 所謂拓扑空間 $(X,\mathfrak{U})$ 是 **Baire 空間**，是指：如果任一集合 $E\subset X$ 是第 1 类集合，則 $\overline{E^c}=X$（即 E^c 在 X 中处处稠密）。

［問題］ 証下面(i)，(ii)，(iii)的每一項都是 $(X,\mathfrak{U})$ 为 Baire 空間的充要条件：

（i）不空的开集合是第 2 类集合。

(ii) 設 $F_1, F_2, \cdots$ 为 X 的閉集合，若 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 有內点，則至少有一个 F_n 存在着內点。

(iii) 可数个处处稠密的开集合之交亦是处处稠密集合。

让我們来說明一下下面的可数公理。

7.11* 設 $(X, \mathfrak{U})$ 为拓扑空間。如果对于任意点 $x\ (\in X)$ 存在着 $U_n(x)\ (n=1, 2, \cdots)\ (\in \mathfrak{U}(x))$，使得任意一个 $U(x) \in \mathfrak{U}(x)$ 都含有某一个 $U_n(x)$，我們就說 $(X, \mathfrak{U})$ 滿足**第1可数公理**。而 $\{U_n(x)\}$ 称为 $\mathfrak{U}(x)$ 的**可数基底**。例如，在距离空間 (X, ρ) 所确定的拓扑空間，$\left\{V\left(x, \frac{1}{n}\right); n=1, 2, \cdots\right\}$ 就是 $\mathfrak{U}(x)$ 的可数基底。

7.12* 設 $(X, \mathfrak{U})$ 为拓扑空間。如果存在着可数个开集合 $\{O_1, O_2, \cdots, O_n, \cdots\} = B(\mathfrak{O})$，对于任意的 $O \in \mathfrak{O}$ 可表示为包含于 O 的 $O_n \in B(\mathfrak{O})$ 的和集，則称 $(X, \mathfrak{U})$ 为滿足**第2可数公理**。这时，$B(\mathfrak{O}) = \{O_1, O_2, \cdots\}$ 也称为 $\mathfrak{O}(X)$ 的**可数基底**。

7.13* 在 $(X, \mathfrak{U})$ 拓扑空間中，設 $\{E_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ 为 X 的子集合族，如果 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$，就称这集合族为 X 的**复蓋**(covering)。特别当所有 E_λ 为开集合时，称 $\{E_\lambda\}$ 为**开复蓋**。

7.14 設拓扑空間 $(X, \mathfrak{U})$ 滿足第2可数公理，則对于任意 X 的开复蓋 $\{O_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$，存在着可数子复蓋 $\{O_{\lambda_n}; n=1, 2, \cdots\}$。

証明 設 $B(\mathfrak{O}) = \{O_n; n=1, 2, \cdots\}$ 为 $\mathfrak{O}(X)$ 的可数基底，对于每一个 O_n，如果在包含它的 O_λ 中选取其中一个 O_{λ_n}，則 $\{O_{\lambda_n}\}$ 的全体就成为 X 的可数子复蓋。 証毕

§8 連續映象

8.1 前面已証明，在拓扑空間 $(X, \mathfrak{U})$ 中，X 的开集 $O(\subset X)$ 的全体 $\mathfrak{O}(X)$，滿足 7.3 的条件 OI, OII, OIII。現在反过来，在集合 X 中先給出一个集合族 $\mathfrak{O}(X)\ (\subset \mathfrak{P}(X))$，并且让它滿足

OI, OII, OIII, 諸条件,这时,对于 $x\in X$, 滿足

$$x\in O\subset U \qquad (O\in\mathfrak{O}(X))$$

的所有 $U(\subset X)$ 的全体用 $\mathfrak{U}(x)$ 来表示。不难看出 $\mathfrak{U}(x)$ 滿足 UI, UII, UIII, UIV 等条件,而且关于这个邻域系导出来的开集合全体,容易驗証是与一开始給出的 $\mathfrak{O}(X)$ 完全一致的。

[問題] 証明以上的命題。

由上可知, X 的拓扑由于給出了 $\mathfrak{O}(X)$ 而被規定。在这样的意义下,可以把拓扑空間 $(X, \mathfrak{U})$ 改写成

$$(X, \mathfrak{O}(X))$$

的形式。

8.2* 在两个拓扑空間 $(X,\mathfrak{U})$, $(Y,\mathfrak{U}')$ 中,所謂映象 $f: X\to Y$ **在点 $x\in X$ 連續**,意指:

$$f^{-1}(\mathfrak{U}(f(x)))\subset\mathfrak{U}(x),$$

卽对于任意 $U'\in\mathfrak{U}(f(x))$,都有 $f^{-1}(U')\in\mathfrak{U}(x)$。

[問題] 对于距离空間 (X, ρ), (Y, ρ') 所决定的拓扑空間 $(X, \mathfrak{U}_\rho)$, $(Y, \mathfrak{U}'_{\rho'})$,映象 $f: X\to Y$ 在点 x 連續的充要条件为:对于任意 $\varepsilon>0$, 可选取某一个 $\delta>0$,使得 $V_{\rho'}(f(x), \varepsilon)\supset f(V_\rho(x, \delta))$.

如映象 $f: X\to Y$ 在 X 中每一点 x 都連續,簡称 f 为連續。

8.3 在拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$, $(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 中,映象 $f: X\to Y$ 是連續的充要条件为:

$$f^{-1}(\mathfrak{O}(Y))\subset\mathfrak{O}(X).$$

証明 設 f 为連續映象。又設 $O'\in\mathfrak{O}(Y)$, $f^{-1}(O')=O$, 則对于任一个 $x\in O$, 就有 $f(x)\in O'$, $f^{-1}(O')=O\in\mathfrak{U}(x)$. 由此 $O\in\mathfrak{O}(X)$. 反之, 設 $f^{-1}(\mathfrak{O}(Y))\subset\mathfrak{O}(X)$. 設对任一点 $x\in X$, 而 $U'\in\mathfrak{U}(f(x))$,則取滿足 $f(x)\in O'\subset U'$ 这样条件的 $O'\in\mathfrak{O}(Y)$,那么由于 $x\in f^{-1}(O')\subset f^{-1}(U')$, $f^{-1}(O')\in\mathfrak{O}(X)$, 可得 $f^{-1}(U')\in\mathfrak{U}(x)$. 因此 f 在 x 为連續。 証畢

[問題] 証 $f:X\to Y$ 連續的充要条件为：$f^{-1}(\mathfrak{A}(Y))\subset\mathfrak{A}(X)$。

8.4 即使映象 $f: X\to Y$ 为連續，也不一定有 $f(\mathfrak{O}(X))\subset\mathfrak{O}(Y)$ 或 $f(\mathfrak{A}(X))\subset\mathfrak{A}(Y)$。当 $f(\mathfrak{O}(X))\subset\mathfrak{O}(Y)$ 时，称 f 为**开映象**，当 $f(\mathfrak{A}(X))\subset\mathfrak{A}(Y)$ 时则称为**閉映象**。

[問題] 求作 f 为連續而不为开映象(閉映象)的例子。

8.5 在拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(x))$，$(Y, \mathfrak{O}(Y))$，$(Z, \mathfrak{O}(Z))$ 中，設映象 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$ 都連續，则 $g\circ f:X\to Z$ 也連續。

証明 設 $f^{-1}(\mathfrak{O}(Y))\subset\mathfrak{O}(X)$，$g^{-1}(\mathfrak{O}(Z))\subset\mathfrak{O}(Y)$，从而有 $(g\circ f)^{-1}(\mathfrak{O}(Z))\subset f^{-1}(\mathfrak{O}(Y))\subset\mathfrak{O}(X)$。　　証毕

8.6* 在两拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$，$(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 中，如果存在一个完全 1-1 的映象 $f:X\to Y$，而 f，f^{-1} 都連續，則称 $(X, \mathfrak{O}(X))$ 与 $(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 为**同胚** (homeomorphic)，而称 f 为**同胚映象**。

完全 1-1 的映象 $f:X\to Y$ 是同胚映象的充要条件为：

$$f(\mathfrak{O}(x))=\mathfrak{O}(Y)\qquad (f^{-1}(\mathfrak{O}(Y))=\mathfrak{O}(X)).$$

(充要条件也可写成：对于所有的 $x\in X$，都有 $f(\mathfrak{U}(x))=\mathfrak{U}(f(x))$，或者，对于所有的 $y\in Y$ 都有 $f^{-1}(\mathfrak{U}(y))=\mathfrak{U}(f^{-1}(y))$。)

以拓扑空間的理論与代数学上的群的理論作一对比，就可看到如下的对照：

拓扑空間↔群，連續映象↔准同构映象，同胚↔同构。

8.7 設在同一集合 X 中，有由两个拓扑定义出的拓扑空間 $(X, \mathfrak{O})$ 和 $(X, \mathfrak{O}')$。当恒等映象 $1_X:(X, \mathfrak{O})\to(X, \mathfrak{O}')$ 为連續时，就称 $(X,\mathfrak{O})$ 的拓扑比 $(X,\mathfrak{O}')$ 的拓扑强(或者相反的說 $(X,\mathfrak{O}')$ 的拓扑比 $(X, \mathfrak{O})$ 的拓扑弱)。不难看出，$(X, \mathfrak{O})$ 比 $(X, \mathfrak{O}')$ 强等价于 $\mathfrak{O}'\subset\mathfrak{O}$。

例 在集合 X，設 $\mathfrak{O}_d=\mathfrak{P}(X)$，那么 $(X, \mathfrak{O}_d)$ 是拓扑空間。又設 $\mathfrak{O}_w=\{X, \phi\}$，則 $(X, \mathfrak{O}_w)$ 亦为拓扑空間。依照上面的定义，易知 $(X, \mathfrak{O}_d)$ 为最强拓扑，而

$(X, \mathfrak{O}_{\omega})$为最弱拓扑。

§9 拓扑空間的构成

从已知拓扑空間来定义新的拓扑空間有好几种方法，玆举二、三种方法說明如下。

9.1* 設 X 为一个集合，$(Y, \mathfrak{O}(Y))$为拓扑空間，$f: X \to Y$ 为已給映象。置

$$\mathfrak{O}(X) = f^{-1}(\mathfrak{O}(Y)),$$

那么 $\mathfrak{O}(X)$必然滿足 OI, OII, OIII 諸条件。这样定出的拓扑空間$(X, \mathfrak{O}(X))$，称为从$(Y, \mathfrak{O}(Y))$由 f（卽依賴于 f）**誘导的拓扑空間**。在这时，$f: X \to Y$ 为連續映象。

［問題］9.1* 定出的拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ 是使 $f: X \to Y$ 为連續的所有 X 的拓扑中最弱的拓扑，試証明之。

9.2* 特殊情形是：設$(Y, \mathfrak{O}(Y))$是拓扑空間，而 X 是 Y 的子集合$(X \subset Y)$，又$\iota: X \to Y$ 是一恒等映象，即$\iota(x) = x(x \in X)$。这时，由

$$\mathfrak{O}(X) = \iota^{-1}\mathfrak{O}(Y) = \{X \cap O;\ O \in \mathfrak{O}(Y)\}$$

定出的拓扑空間$(X, \mathfrak{O}(X))$，称为$(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 的**拓扑子空間**(或称**相对拓扑空間**)。

［問題］設$(X, \mathfrak{O}_\rho)$为由距离空間(X, ρ)所定义的拓扑空間，而 $(A, \mathfrak{O}_{\rho A})$ $(A \subset X)$是由(A, ρ_A)所定义的拓扑空間，則后者为前者的拓扑子空間。

9.3* 設$(X, \mathfrak{O}(X))$，$(Y, \mathfrak{O}(Y))$为两个拓扑空間。对于 $Z = X \times Y$，置

$$\mathfrak{O}^*(Z) = \{pr_X^{-1}(A) \cap pr_Y^{-1}(B) = A \times B;\ A \in \mathfrak{O}(X),\ B \in \mathfrak{O}(Y)\},$$

$$\mathfrak{O}(Z) = \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda^*;\ O_\lambda^* \in \mathfrak{O}^*(Z)\}.$$

(其中 $\bigcup_\Lambda$ 为任意基数的集合的和集。) 那么 $\mathfrak{O}(Z)$ 必然滿足 OI, OII, OIII 等条件。我們称 $(Z, \mathfrak{O}(Z))$ 为$(X, \mathfrak{O}(X))$ 与 $(Y,$

$\mathfrak{O}(Y)$)的直积拓扑空間。不难看出，$pr_X: Z\to X$ 及 $pr_Y: Z\to Y$ 为連續映象，并且是开映象。

［問題］$(X, \mathfrak{O}(X))$ 与 $(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 的直积拓扑空間 $(Z, \mathfrak{O}(Z))$，是能使 $pr_X: Z\to X$ 及 $pr_Y: Z\to Y$ 为連續的 Z 的最弱拓扑。

9.4* 設 $(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ 为拓扑空間。$Z=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 是直积集合，置

$$\mathfrak{O}^*(Z)=\{\bigcap_{i=1}^{n}pr_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i});\ n=1, 2, \cdots, \lambda_i\in\Lambda, O_{\lambda_i}\in\mathfrak{O}_{\lambda_i}\}$$

(此处 pr_{λ_i} 为 $Z\to X_{\lambda_i}$ 的射影)及

$$\mathfrak{O}(Z)=\{\bigcup_{\mu\in M}O_\mu^*;\ O_\mu^*\in\mathfrak{O}^*(Z)\}$$

(M 的基数为任意的)，則 $\mathfrak{O}(Z)$ 滿足 OI, OII, OIII 諸条件。这时称 $(Z, \mathfrak{O}(Z))$ 为直积拓扑空間。显然 $pr_\lambda: Z\to X_\lambda$ 为連續开映象。

［問題1］直积拓扑空間是能使所有 $pr_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 都連續的最弱拓扑。

［問題2］由 Euclid 空間 (R^n, ρ_n) 定义的拓扑空間 $(R^n, \mathfrak{O}_{\rho_n})$，与由 (R, ρ_1) 所定义的拓扑空間 $(R, \mathfrak{O}_{\rho_1})$ 的 n 个直积空間是一致的。

9.5* 設 $(X, \mathfrak{O}(X))$ 为拓扑空間，Y 为任意一集合，并設 $f: X\to Y$ 为完全映象(即 $f(X)=Y$)，(亦可把 Y 看作 X 的商空間，而把 f 看作完全正規映象)，置

$$\mathfrak{O}(Y)=\{B;\ B\subset Y, f^{-1}(B)\in\mathfrak{O}(X)\},$$

則 $\mathfrak{O}(Y)$ 滿足 OI, OII, OIII。这时称 $(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 为**商拓扑空間**。

例1 在 9.4* 中，从 $(Z, \mathfrak{O}(Z))$ 依賴于 $pr_X: Z\to X$ 得到的商拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ 是与最初的 X 拓扑一致的。

例2 設 $X=R^{n+1}-\{(0, \cdots, 0)\}$，以 P^n 表示通过原点的所有直綫的全体。在 P^n 上定义的商拓扑空間，称为 n 維射影空間。

例3 由 $X=R$, $Y=R/Z$, $f: x\to x+Z(\in R/Z)$ 定义的商拓扑空間 $(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 与平面上的单位圓 $S^1=\{e^{2\pi ir};\ r\in R \bmod Z\}$ 同胚。

［問題］Y 的商拓扑是使 $f: X\to Y$ 为連續的 Y 的最强拓扑。

用以上方法，从 Euclid 空間出发，也可以导出許多形形色色

的拓扑空間。

§10 連 通 性

10.1* 所謂拓扑空間$(X, \mathfrak{O}(X))$为**連通的**(connected)是指：在$\mathfrak{O}(X)$中不存在有两个$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}(X)$ $(O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset)$，满足

$$X = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

根据这一定义，立卽可知：在拓扑空間$(X, \mathfrak{O}(X))$，$(Y, \mathfrak{O}(Y))$中，如果X連通，而$f: X \to Y$为完全連續映象，則Y也是連通的。

10.2* 設A为拓扑空間$(X, \mathfrak{O}(X))$的子集合，如拓扑子空間$(A, \mathfrak{O}(A))$为連通，則称A为連通的。

［問題］試証綫段$[a, b]$为連通的。

10.3 (i) 設$A_1, A_2 \subset (X, \mathfrak{O}(X))$，$A_1$，$A_2$为連通，且$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$，則$A_1 \cup A_2$也連通。

(ii) 設$A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$都是連通集，且$\bigcap_\lambda A_\lambda \neq \emptyset$，則$\bigcup_\lambda A_\lambda$也連通。

(iii) 若A为連通，則其閉包$\overline{A}$也連通。

［問題］証明上面的命題。

10.4* 在拓扑空間$(X, \mathfrak{O})$中，作所有含点x的連通集X的子集之和集，則这一集合一定是含x的最大連通集$(\subset X)$。我們称这最大連通集为含x的**成分**。$(X, \mathfrak{O})$中的任两个成分或者重合，或者不相交。因此不难看出，X可表示为互不相交的成分之和。

例1 在Cantor集合C中，对每一点x，含x的成分为$\{x\}$。

例2 R的开集合O中含任一点的每一点成分为开区間，从而任意开集合可表示为

$$O = \bigcup_n I_n \quad (I_m \cap I_n = \emptyset, (m \neq n)),$$

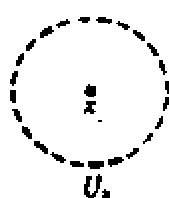
卽O可表示为充其量为可数个开区間I_n的和。

10.5* 在拓扑空間$(X, \mathfrak{O})$中，閉区間$I = [0, 1]$的連續映象$f: I \to X$的象$f(I)$称为X上的**弧**。如果X上的任意两点都可以

結成弧，就称 X 为弧状連結。凡是弧状連結的拓扑空間一定为連通的，但是，反过来不一定为眞。

§11 分离条件(Hausdorff 空間与正規空間)

11.1* 如果拓扑空間$(X, \mathfrak{O})$滿足下面的 H 条件，則称它为 **Hausdorff 空間**：



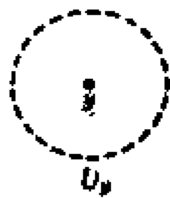


图 11.1

H 对于任意相异的两点 x, y $(\in X)$，存在着 $U_x \in \mathfrak{U}(x), U_y \in \mathfrak{U}(y)$，使得 $U_x \cap U_y = \emptyset$。

在 Hausdorff 空間，仅由一点所組成的子集合$\{x\}$必然是閉集。

例 1 由距离空間(X, ρ)定义的拓扑空間$(X, \mathfrak{O}_\rho)$为 Hausdorff 空間，因为当 $\alpha=\rho(x, y)>0$ 时，就有 $V(x, \alpha/2) \cap V(y, \alpha/2)=\emptyset$。

例 2 象 $\mathfrak{O}_w=\{X, \emptyset\}$这样的拓扑空間$(X, \mathfrak{O})$不是 Hausdorff 空間。

11.2 (i) 設$(X, \mathfrak{O})$是 Hausdorff 空間，則关于它的拓扑子空間 Y 也是 Hausdorff 空間。

(ii) 設$(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ 皆为 Hausdorff 空間，則它們的直积拓扑空間也是 Hausdorff 空間。

(iii) 設 $(Y, \mathfrak{O}')$ 是 Hausdorff 空間，而 $(X, \mathfrak{O})$ 是由映象 $f: X \to Y$ 誘导出来的拓扑空間，則$(X, \mathfrak{O})$为 Hausdorff 空間的充要条件是：f 为 1-1 对应映象。

[問題] 試証明上面的命題。

(iv) 設$(Y, \mathfrak{O}')$是由拓扑空間$(X, \mathfrak{O})$及 $f: X \to Y$ 构成的商拓扑空間，那么即使$(X, \mathfrak{O})$是 Hausdorff 空間，$(Y, \mathfrak{O}')$并不一定是 Hausdorff 空間。

例 設 $X=R$, $Y=R/Q$, $f: a(\in X) \to a+Q(\in Y)$，則 Y 不是 Hausdorff 空間。

11.3* 趾我們来定义更强的分离条件 N:

N 設 A_1, A_2 为任意两閉集，如果 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$，則存在着开集 O_1, O_2 滿足 $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$，而且 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$。

滿足条件 N 的 Hausdorff 空間称为**正規空間**，但 Hausdorff 空間未必是正規空間。

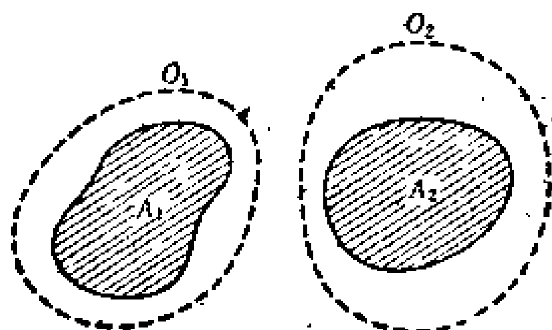


图 11.2

11.4 距离空間是正規空間。

証明 設 A_1, A_2 为任意两不相交的閉集，对于 $x \in A_1$，置 $\varepsilon_1(x) = \inf\limits_{y \in A_2} \rho(x, y) > 0$。对于 $y \in A_2$，置 $\varepsilon_2(y) = \inf\limits_{x \in A_1} \rho(x, y) > 0$。又設

$$O_1 = \bigcup_{x \in A_1} V(x, \varepsilon_1(x)/2), \quad O_2 = \bigcup_{y \in A_2} V(y, \varepsilon_2(y)/2),$$

那么，就有 $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ 成立。 証毕

对定义在正規空間上的連續函数处理起来比較容易。

11.5 Urysohn 的輔理❶ 設 A_1, A_2 为正規空間 $(X, \mathfrak{O})$ 的两个閉集，且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$。这时，就存在着連續映象 $f: X \to R$，并滿足如下条件：

(i) $f(x) = 0 \quad (x \in A_1)$;

(ii) $f(x) = 1 \quad (x \in A_2)$;

(iii) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad (x \in X)$.

証明 不难看出，条件 N 等价于下面的事实：設 A 为閉集，O 为开集，而 $A \subset O$，則存在着一个 O_1，使得 $A \subset O_1 \subset \bar{O}_1 \subset O$。我們可反复利用这个性质来証明上述定理。先命 $O(1) = A_2^c$（是开集），則 $A_1 \subset A_2^c$，即 $A_1 \subset O(1)$，因此存在着一个 $O\left(\frac{1}{2}\right)$，滿足 $A_1 \subset$

❶ 参看关肇直：拓扑空間概論，科学出版社，1958，第二章 §4. 本定理証明中增加了解釋。——譯者注

$O\left(\frac{1}{2}\right)\subset\bar{O}\left(\frac{1}{2}\right)\subset O(1)$，同样存在着 $O\left(\frac{1}{2^2}\right)$ 及 $O\left(\frac{3}{2^2}\right)$ 满足 $A\subset$

$O\left(\frac{1}{2^2}\right)\subset\bar{O}\left(\frac{1}{2^2}\right)\subset O\left(\frac{1}{2}\right)\subset\bar{O}\left(\frac{1}{2}\right)\subset O\left(\frac{3}{2^2}\right)\subset\bar{O}\left(\frac{3}{2^2}\right)\subset O(1)$.

反复进行下去可得到有理数 $\alpha=\frac{r}{2^n}(n=1,2,\cdots,r=1,2,\cdots,2^n)$。每一个有理数对应着一个开集 $O(\alpha)$，并满足：(i) $O(1)=A_2^c$，(ii) $A_1\subset O(\alpha)$，(iii) $\alpha<\beta$，$\overline{O(\alpha)}\subset O(\beta)$。现在只要假定：(a) 当 $x\in A_2$ 时 $f(x)=1$，(b) 当 $x\in A_2^c$ 时 $f(x)=\inf\{\alpha; x\in O(\alpha)\}$，这个函数 $f(x)$ 就满足定理的要求。 証毕

11.6 Tietze 扩張定理 設 $(X,\mathfrak{O})$ 为正規空間，A 为 X 的子集合，而 $\varphi_0:A\to R$ 为定义在 A 上的有界实連續函数。那么存在着定义在 X 上的实連續函数 $f:X\to R$，并满足：(i) $f|A=\varphi_0$，(ii) $\sup\{|f(x)|; x\in X\}=\sup\{|\varphi(x)|; x\in A\}(=\mu_0)$。

証明 首先，設 $A_1=\varphi^{-1}([\mu_0/3,\infty))$，$A_2=\varphi^{-1}((-\infty,-\mu_0/3])$，依照 11.5 的做法，可得一連續实函数：$f_0:X\to R$，而且 $f_0(x)=\begin{cases}\mu_0/3 & (x\in A_1)\\ -\mu_0/3 & (x\in A_2)\end{cases}$，$|f_0(x)|\leqslant\mu_0/3(x\in X)$。特别在 A 上命 $\varphi_1(x)=\varphi_0(x)-f_0(x)$，则 $|\varphi_1(x)|\leqslant 2\mu_0/3(=\mu_1)$。継續这样做下去，能够得到 $f_n(x)$，$\varphi_n(x)$，满足：(i) $f_n(x)$ 为在 X 上的連續函数，$\varphi_n(x)$ 为在 A 上的連續函数，(ii) $\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}(x)-f_{n-1}(x)$，(iii) $\sup\{|\varphi_n(x)|; x\in A\}=\mu_n\leqslant(2/3)^n\mu_0$，$\sup\{|f_n(x)|; x\in X\}\leqslant\mu_n/3$。因 $f(x)=f_0(x)+f_1(x)+\cdots$ 一致收斂，故 $f:X\to R$ 为連續函数而且有 $|f(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|\leqslant\mu_0$。另一方面，当 $x\in A$ 时有 $\varphi_0(x)=\sum f_n(x)=f(x)$。 証毕

下面的性质虽然常常有很大用处，但本书以后并不用到，所以只把結果叙述一下。

11.7* 一般拓扑空間 $(X,\mathfrak{O})$ 的子集合 $\{O_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 为局部有限，意指：对

于任意一个 $x\in X$, 存在一个邻域 U_x, 使得 $\{\lambda;\ U_x\cap O_\lambda\neq\emptyset\}$ 为有限。

11.8 設 $(X,\mathfrak{O})$ 为正規空間, $\{O_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 为 X 的局部有限的开复盖, 则可取适当的閉集合 $A_\lambda\subset O_\lambda$, 使得 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 除此以外, 存在着定义在 X 上的实連續函数 $f_\lambda(x)\ (\lambda\in\Lambda)$, 满足: (i) $0\leqslant f_\lambda(x)\ (x\in X)$, (ii) $f_\lambda(x)=0\ (x\in X-O_\lambda)$; (iii) $f_\lambda(x)>0\ (x\in A_\lambda)$, (iv) $\sum_{\lambda\in\Lambda}f_\lambda(x)=1$.

[問題] 設 $(X,\mathfrak{O})$ 为正規空間, 对于开集合 O, 置

$$S(O)=\{f(x);\ f(x)\text{ 定义在}X\text{的連續函数},\ 0\leqslant f(x)\leqslant c_O(x)\}.$$

对于两个开集合 O_1, O_2 置

$$S(O_1)+S(O_2)=\{f+g;\ f\in S(O_1),\ g\in S(O_2)\},$$

则

$$S(O_1\cup O_2)\subset S(O_1)+S(O_2).$$

11.9 虽然正規空間有其良好的特性, 但有下面的事实:

(i) 正規空間的拓扑子空間未必是正規空間;

(ii) 两个正規空間的直积空間未必是正規空間。

(这些性質的証明可参看 Kelley[6]。)

現在叙述一下关于正規空間成为距离空間的条件。虽然目前对必要与充分条件已經确立, 但下面定理所給出的充分条件較易于运用。

11.10 Urysohn 的附以距离定理 满足第二可数公理的正規空間 $(X,\mathfrak{O})$ 一定能够定义一个距离函数, 使由 (X,ρ) 所确定的拓扑空間与原有的拓扑空間 $(X,\mathfrak{O})$ 一致(这就是所謂 $(X,\mathfrak{O})$ 附以距离可能的定理)

証明 設 $\mathfrak{O}$ 的可数基底为 $\{O_n;\ n=1,2,\cdots\}$. 考虑具有 $\bar{O}_{i_l}\subset O_{j_l}$ 这样集偶 $P_l=(O_{i_l},O_{j_l})$ 的全体 $\{P_l;\ l=1,2,3,\cdots\}$. 对于每一个 P_l, 作一个定义在 X 上的实連續函数 $f_l(x)$:

$$f_l(x)=\begin{cases}1 & (x\in O_{i_l}),\\ 0 & (x\bar{\in}O_{j_l}),\quad 0\leqslant f_l(x)\leqslant 1,\end{cases}$$

若 $x\neq y\ (\in X)$, 则存在具有性质 $x\in O_{i_l}$, $y\bar{\in}O_{j_l}$ 的集偶 P_{l_0}. 令 $u_l(x)=f_l(x)/l\ (l=1,2,\cdots)$, 则 $\sum_{l=1}^{\infty}u_l^2(x)\leqslant\sum 1/l^2<+\infty$. 如設

$$\varphi(x)=(u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots),$$

則 $\varphi: X\to l^{(2)}$ 为 1-1 对应的映象 (l^2 在 §6 例 6 中已知为距离空間)。現在只要置 $\rho(x,y)=\rho_2(\varphi(x),\varphi(y))$，則 ρ 就是在 X 上定义的距离函数。由 ρ 定义 $\mathfrak{U}_\rho$，这一 $\mathfrak{U}_\rho$ 与一开始所給的邻域系 $\mathfrak{U}$ 相一致，因为：

(i) 对于任意 $x\in X$ 和 $V_\rho(x,\varepsilon)(\varepsilon>0)$，一定存在着 $U\in\mathfrak{U}(x)$，使得 $U\subset V_\rho(x,\varepsilon)$。事实上，取滿足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2\leqslant K^2$，$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)<\frac{\varepsilon^2}{5}$ 的 K，n_0，其次选取 $U\in\mathfrak{U}(x)$，使当 $y\in U$ 时，滿足条件 $|u_l(x)-u_l(y)|<\varepsilon/\sqrt{5n_0}K\ (l=1,\cdots,n_0)$，則 $U\subset V_\rho(x,\varepsilon)$。由此可見 $\mathfrak{U}(x)\supset\mathfrak{U}_\rho(x)$。

(ii) 对于任意的 $U\in\mathfrak{U}(x)$，存在着 $V_\rho(x,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$，滿足 $V_\rho(x,\varepsilon)\subset U$。事实上，設 $x\in O_k\subset U$，我們可以取具有 $x\in O_k\subset U$，$x\in O_j\subset\bar{O}_j\subset O_k$ 性質的集偶 $P=(O_j,O_k)$。設 $P=P_n$，若 $\rho(x,y)<\frac{1}{n}$，从 $u_n(x)=0$ 必然有 $u_n(y)<1$。按照 $u_l(x)$ 的定义，就有 $y\in O_k$，即 $V_\rho(x,1/n)\subset U$。这就是說 $\mathfrak{U}_\rho(x)\supset\mathfrak{U}(x)$。 証畢

§12 緊性

12.1* 如果 Hausdorff 空間 $(X,\mathfrak{D})$ 滿足如下的条件 K，就称为緊空間(compact space)：

K 若 X 的开集合族 $\{O_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 为 X 的复盖(即 $X=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$)，則必有有限个 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}O_{\lambda_i}$。

容易驗証，条件 K 与下面的条件 K′ 等价：

K′ 若 X 的閉集合族 $\{A_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 具有有限交叉性(即对于任意有限个 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都有 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}\neq\emptyset$)，則 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\emptyset$。

12.2 緊空間 $(X,\mathfrak{D})$ 是正規空間。

証明　設有閉集合 $A_1, A_2(A_1\cap A_2=\emptyset)$，对于 $x\in A_1, y\in A_2$，选取具有 $U_x^{(y)}\cap U_y^{(x)}=\emptyset$ 这样性质的邻域 $U_x^{(y)}\in\mathfrak{U}(x)$，$U_y^{(x)}\in\mathfrak{U}(y)$。从 $\bigcup_{x\in A_1}U_x^{(y)}\supset A_1$，可以选取有限个 $x_1,\cdots,x_m$，满足 $U_X^{(y)}=\bigcup_{i=1}^{m}U_{x_i}^{(y)}\supset A_1$（参看 12.3）。置 $U_y=\bigcap_{i=1}^{m}U_y^{(x_i)}(y\in A_2)$。又从 $\bigcup_{y\in A_2}U_y\supset A_2$，同样可以取有限个 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 满足 $\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}\supset A_2$。如果置 $O_1=\bigcap_{i=1}^{n}U_X^{(y_i)}$，$O_2=\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}$，那么 $A_1\subset O_1$，$A_2\subset O_2$，$O_1\cap O_2=\emptyset$。　証毕

用 §9 里的方法由紧空間构成种种的拓扑空間，試問它們是否也是紧空間?

12.3　紧空間 $(X, \mathfrak{O})$ 的拓扑子空間 A 是紧的充要条件为：A 为閉集合。

証明　設 A 为閉集合。如果 $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O'_\lambda$，$O'_\lambda\in\mathfrak{O}(A)$，而 $O'_\lambda=A\cap O_\lambda, O_\lambda\in\mathfrak{O}$，則 $X=(X-A)\cup\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$。由于 X 是紧空間，故存在着有限个 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $X=(X-A)\cup\bigcup_{i=1}^{n}O_{\lambda_i}$，即 $A=\bigcup_{i=1}^{n}O'_{\lambda_i}$。必要条件可从 (12.6) 导出来。　証毕

12.4　若 $(X, \mathfrak{O})$ 是紧空間，$(Y, \mathfrak{O}')$ 为 Hausdorff 空間，而 $f: X\to Y$ 又是完全 1–1 对应連續映象，那么 $(Y, \mathfrak{O}')$ 也是紧空間。特别是从紧空間 $(X, \mathfrak{O})$ 导出的商拓扑空間如果为 Hausdorff 空間，則必同时为紧空間。

証明　設 $Y=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda'(O'_\lambda\in\mathfrak{O}')$，則 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(O'_\lambda)$。由于 f 为連續，故 $f^{-1}(O'_\lambda)\in\mathfrak{O}$。又因 X 的紧性，所以存在着有限个 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(O'_{\lambda_i})$，由此可得 $Y=\bigcup_{i=1}^{n}O'_{\lambda_i}$。　証毕

12.5　Tychonoff 定理　設 $(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$ 是紧空間，那么它們的直积拓扑空間 $(X, \mathfrak{O})$ $(X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)$ 也是紧空間。

証明　設 $\{A_\mu; \mu\in M\}$ 为 X 的有限交叉性的閉集合族。与 §5 的例 1 証明相同，存在着一个含 $\{A_\mu\}$ 的极大濾波 $\mathfrak{F}$。X_λ 的子

集合族 $\mathfrak{F}_\lambda=\{pr_\lambda(F);\ F\in\mathfrak{F}\}$ 也是有限交叉性的。由于 X_λ 是緊的，所以 $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\overline{pr_\lambda F}\neq\emptyset$。設 $x_\lambda^0\in\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\overline{pr_\lambda F}$，并假定 $x\in X$ 满足：$pr_\lambda(x^0)=x_\lambda^0$。現在只要能够証明 $x^0\in\bigcap_{F\in\mathfrak{F}}\overline{F}$，問題也就解决了（因 $\mathfrak{F}$ 为含 $\{A_\mu\}$ 的极大深透，故按照深透的定义知 $x^0\in\bigcap_{\mu\in M}A_\mu$，即 $\bigcap_{\mu\in M}A_\mu\neq\emptyset$）。为此，只要能証明 x_0 的任意邻域 U（或者属于 $\mathfrak{U}(x^0)$ 的基底 U），满足 $U\cap F\neq\emptyset(F\in\mathfrak{F})$就成了。但是邻域 U 按照拓扑直积空間的构成只要考虑 $U=pr_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1})\cap\cdots\cap pr_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})\ (U_{\lambda_i}\in\mathfrak{U}_\lambda(x_\lambda^0))$ 的形式就足够了。要証明 $F\cap U=F\cap pr_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap pr_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}))\neq\emptyset$，只要能証 $F\cap pr_\lambda^{-1}(U_\lambda)\neq\emptyset\ (U_\lambda\in\mathfrak{U}_\lambda(x_\lambda^0))$ 就可以了。然而 $F\cap pr_\lambda^{-1}(U_\lambda)\neq\emptyset(U_\lambda\in\mathfrak{U}_\lambda(x_\lambda^0))$ 可由 $pr_\lambda F\cap U_\lambda\neq\emptyset$ 导出来。这就証明了 X 的緊性。　証毕

12.6　設 $(X,\mathfrak{O})$ 为緊空間，$(Y,\mathfrak{O}')$ 为 Hausdorff 空間，$f: X\to Y$ 为連續映象，則 f 是閉的。特別 $f(X)$ 是 Y 的閉子集合。

証明　設 $y\in Y-f(X)$，$f(x)\in f(X)$，然后取适合条件 $U_{f(x)}^{(y)}\cap U_y^{(f(x))}=\emptyset$ 的邻域 $U_{f(x)}^{(y)}\in\mathfrak{U}'(f(x))$，$U_y^{(f(x))}\in\mathfrak{U}'(y)$。因 $\bigcup_{f(x)\in f(X)}U_{f(x)}^{(y)}\supset f(X)$，而且按照 12.4，$f(X)$ 是緊的，所以可取有限个 $U_{f(x_1)}^{(y)}\cup\cdots\cup U_{f(x_n)}^{(y)}\supset f(X)$。若置 $U_y=\bigcap_{i=1}^{n}U_y^{(f(x_i))}$，那么 $f(X)\cap U_y=\emptyset$，即 $Y-f(X)$ 为开集合。一般来講，若設 A 为 X 的閉集合，則依照 12.3，A 是緊的，由此 $f(A)$ 为閉集合。　証毕

12.7　設 $(X,\mathfrak{O})$ 为緊空間，$(Y,\mathfrak{O}')$ 为 Hausdorff 空間，又設 $f: X\to Y$ 为完全 1-1 对应的連續映象，那么 f^{-1} 也連續，而且 $(X,\mathfrak{O})$ 与 $(Y,\mathfrak{O}')$ 同胚。

証明　可从 12.6 直接导出来。

12.8　設 $(X,\mathfrak{O})$ 为緊空間，$f: X\to R$ 为在 X 上定义的連續映象，則 $f(X)$ 为有界閉集，而且存在着 $x_0,x_1\in X$，使得 $f(x_0)=\sup f(X)$，$f(x_1)=\inf f(X)$。

証明 因$f(X)$是R的紧集合，按照第3章§14．10，它是有界的闭集合，由此$\sup f(X)$，$\inf f(X)$也属于$f(X)$。　　証毕

[問題] 紧空間$(X, \mathfrak{O})$是 Baire 空間。(証明相似于§15.8。)

其他紧的距离空間将在第3章中叙述。

到此为止，已經接触到許多空間的名称，現在复习一下他們之間的关系。

距离空間↘
　　　　　(正規空間)→ Hausdorff 空間→拓扑空間。
紧空間↗

§13 局部紧性

13.1* 在 Hausdorff 空間$(X, \mathfrak{O})$，若X的每一点x至少有一个邻域为紧集合，則称X为**局部紧** (locally compact)**空間**。

譬如，Euclid 空間R^n为局部紧。致叙述一下局部紧空間的若干性质，但不加以証明。

13.2 局部紧空間虽然不一定是正規空間，但如满足第二公理，则就是正規空間。

13.3 直积空間为局部紧的充要条件是：諸因子空間$(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$中，除有限多个外都是紧的，而这些除外的有限多个因子空間都是局部紧的。

13.4* 在 Hausdorff 空間$(X, \mathfrak{O})$中，若对X的每一点x，至少有一个与n維 Euclid 空間的球体$V^n = \{(x_1, \cdots, x_n); \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\}$同胚的邻域$U_x$存在的时候，称$(X, \mathfrak{O})$为$n$**維流形体**(这样的$U_x$称为**坐标邻域**)。

13.5 流形体$(X, \mathfrak{O})$为局部紧空間。X满足第二公理的充要条件是：X可以被可数个坐标邻域所复盖。

在正規空間中，11.8的性质是很重要的，因此近来用下面的概念。

13.6* 在正規空間中，对于X的任意开复盖$\{O_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$，如果存在局部有限开复盖$\{O'_\mu; \mu \in M\}$，使得对于任意$O'_\mu$都含于某一个$O_\lambda$中(即$O'_\mu \subset O_\lambda$)，这时，称$(X, \mathfrak{O})$为**仿紧**(paracompact)**空間**。

13.7 距离空間、紧空間以及满足第二可数公理的局部紧空間都是仿紧空間。

关于这些可参看 Kelley[8] 著书。

第 3 章 距离空間

§14 收 斂

在 Euclid 空間，收斂的概念与邻域同样是直观的、基本的概念，訌我們来說明一下这个概念在距离空間的情形。

14.1* 設 (X, ρ) 为距离空間，所謂 X 的点列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)=\{x_n\}$ 收斂于 x，意指：$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, x)=0$。記为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad (\text{有时表示为} \lim x_n = x).$$

換句話說，就是对于任意一个 $\varepsilon>0$，必有一个 n_0 存在，只要 $n\geqslant n_0$，便有 $x_n\in V(x, \varepsilon)$。

14.2 在距离空間中，有如下的性質：

(i) 若 $x_n=x(n=1, 2, \cdots)$，則 $\lim x_n=x$。

(ii) 設 $\lim x_n=x$，則对 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n'}\}$，都有 $\lim x_{n'}=x$。

(iii) 如果对于 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n'}\}$，都可适当选取 $\{x_{n'}\}$ 的子列 $\{x_{n''}\}$，滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n''}=x$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$。

(iv) 設有二重点列 $\{x_{m,n}\}$，若 $\lim\limits_{m\to\infty} x_{m,n}=y_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=z$，則可选取 $m(n)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m(n),n}=z$。

(v) 对于点列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y \Rightarrow x=y$。

这些性質的証明是很容易的，詳細的說明从略。只要应用以上的性質，从收斂概念就可以导出其他的概念。

14.3 在距离空間 (X, ρ) 中，設 E 为 X 的任意子集，則

(i) $x\in\overline{E}\Leftrightarrow$存在着属于 E 的点列 $\{y_n\}$，使得 $\lim y_n=x$。

(ii) $x\in E^d\Leftrightarrow$存在着属于 E 的点列$\{y_n\}$ $(y_n\neq x)$而 $\lim y_n=x$。

(iii) $x\in E^f\Leftrightarrow x\in\overline{E}$ & $x\in\overline{X-E}$。

(iv) $x\in E^\circ\Leftrightarrow$若$\lim y_n=x(y_n\in X)$，那末存在着一个 n_0，只要 $n\geqslant n_0$，便有 $y_n\in E$。

这些証明是不难的。

下面討論在 X 中定义着两个以上相异距离的情形。

14.4* 設在 X 中有两个距离函数 ρ, ρ'，距离空間 (X, ρ)，(X, ρ') 定义同一拓扑空間的充要条件是：設 $\{x_n\}$ 为 X 的任一点列，如果关于 ρ 有 $\lim x_n=x$，則关于 ρ' 也有 $\lim x_n=x$；反之，如果关于 ρ' 有 $\lim x_n=x$，則关于 ρ 也有 $\lim x_n=x$。換句話說，充要条件为：对于任意 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$ (及 $\delta'>0$)，使得 $\rho(x, y)<\delta\Rightarrow\rho'(x, y)<\varepsilon$ $(\rho'(x, y)<\delta'\Rightarrow\rho(x, y)<\varepsilon)$，这时候称 ρ 与 ρ' **等价**。

例 在距离空間 (X, ρ)，若置 $\rho'(x, y)=\rho(x, y)/(1+\rho(x, y))$，那么 ρ 与 ρ' 等价。其他的例可参看 §16。

14.5* 如果在距离空間 (X, ρ) 中，存在着一个处处稠密的可数集 A，那么称(X, ρ)为**可分**。

例 設 Q 为有理数集合，則因 $\overline{Q}=R$，故 R 为可分空間。同样因 $\overline{Q^n}=R^n$ (Q^n 为有理点全体)，故 R^n 为可分的。

14.6 在距离空間，可分与满足第二可数公理是等价的。

証明 若(X, ρ)为可分，則可設$A=\{a_1, a_2, \cdots\}$，$\overline{A}=X$。如果置 $O_{i,r}=V(a_i, r)$ $(r\in Q)$，則 $\{O_{i,r}; i=1, 2, \cdots, r\in Q\}$ 就是 $\mathfrak{O}_\rho(X)$的可数基底。

反之，若 $(X, \mathfrak{O}_\rho)$ 满足第二可数公理，則設 $\mathfrak{O}_\rho(X)$ 的可数基底为$B(\mathfrak{O}_\rho)=\{O_n; n=1,2,\cdots\}$，如果取任意$a_n\in O_n(n=1, 2, \cdots)$，那么对于 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 就有 $\overline{A}=X$。　　証毕

14.7* 設 (X, ρ) 为距离空間，对于任意 $\varepsilon>0$，都存在着有

限个 $x_1, \cdots, x_n$，使得 $X=V(x_1, \varepsilon)\cup\cdots\cup V(x_n, \varepsilon)$，这时候称 (X, ρ) 为完全有界(或称完全紧 precompact)的距离空間。

14.8 紧距离空間为完全有界，而完全有界的距离空間必为可分。

証明 若 X 为紧空間，则由 $X=\bigcup_{x\in X}V(x, \varepsilon)$，可选取有限个 $V(x_i, \varepsilon)$，使得 $X=\bigcup_{i=1}^{n}V(x_i, \varepsilon)$。这就是說，$X$ 为完全有界。

又，若 (X, ρ) 为完全有界，则 X 可表示为 $X=\bigcup_{i=1}^{n_r}V(x_i^{(r)}, r)$ $(r\in Q)$，因此对于可数集合 $A=\{x_i^{(r)}; r\in Q, i=1, \cdots, n_r\}$，就有 $\overline{A}=X$。　　証毕

14.9 Fréchet 定理 距离空間 (X, ρ) 为紧的充要条件是：对于任意(可数)的无限集合 $A(\subset X)$，至少有一个聚点(在 X 中)。

証明 設 (X, ρ) 是紧空間，又設可数集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$ 沒有一个聚点，则所有的 $A_k=\{a_k, a_{k+1}, \cdots\}(k=1, 2, \cdots)$ 都是閉集合。但 $\{A_k; k=1, 2, \cdots\}$ 是有限交叉性的，故 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\emptyset$。这与 (X, ρ) 为紧空間的假設矛盾。反之，設任意无限集合至少有一个聚点，则 (X, ρ) 是完全有界的。[如果不是如此，必存在一个 $\varepsilon>0$，可以取出 $\{x_k; k=1, 2, \cdots\}$，使得 $\rho(x_i, x_j)>\varepsilon(i\neq j)$。这样 $\{x_k\}$ 就沒有聚点了。] 既然 (X, ρ) 为完全有界，从 14.8 定理知其为可分，从而 X 滿足第二可数公理(14.6)。現在設 X 的任意开复蓋 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$，依照 7.14 可知存在着可数开子复蓋使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}O_{\lambda_n}$。若 $X\neq\bigcup_{n=1}^{k}O_{\lambda_n}(k=1, 2, \cdots)$，我們取 $a_k\in X$，但 $a_k\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{k}O_{\lambda_n}$(当 $j\neq k$ 时，$a_j\neq a_k$)，则 $A=\{a_k; k=1, 2, \cdots\}$ 就沒有聚点了，这与假設矛盾。　　証毕

从 14.9 的結果，可直接导出下面著名的定理。

14.10 Bolzano–Weierstrass 定理

（i） R 的有界閉区間是紧的。

（ii） R^n 的有界閉区間也是紧的。

（iii） R^n 的子集合 A 为紧的充要条件是：A 为有界的閉集合。

下面叙述一下关于紧空間中的一些記号。

14.11* 設 A 为距离空間 (X, ρ) 的子集合，定义

$$\delta(A) = \sup\{\rho(a, b);\ a, b \in A\}$$

为 A 的直徑。

$A, B(\subset X)$ 的距离定义为

$$d(A, B) = \inf\{\rho(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

依照 12.8，若 A，B 为紧，則存在着 $a_0, a_1 \in A$，使得 $\delta(A) = \rho(a_0, a_1)$，又存在着 $a_0 \in A$，$b_0 \in B$，使得 $d(A, B) = \rho(a_0, b_0)$。不言而喻，当 A，B 为紧而且 $A \cap B = \emptyset$ 时，則 $d(A, B) > 0$。

§ 15 距离空間的一致拓扑性质

設 ρ, ρ' 为定义在 X 上的两个距离函数，如果 (X, ρ)，(X, ρ') 所定义的拓扑空間相同，而 (X, ρ) 为完全有界，但 (X, ρ') 未必完全有界。

例 設 $X = R$，$\rho(a, b) = |a-b|$，$\rho'(a, b) = \dfrac{|a-b|}{1+|a-b|}$，則 (X, ρ') 为完全有界而 (X, ρ) 不是全有界。

从开集合族 $\mathfrak{O}$ 的性质所引出来的性质（如連通性，紧性等）对拓扑空間 $(X, \mathfrak{O})$ 和与它同胚的拓扑空間来說是共通的，也就是說凡是拓扑空間 $(X, \mathfrak{O})$ 具有的性質，与它同胚的拓扑空間也有，反之亦如此。我們称这些性质为拓扑的性质。但是距离空間的

完全有界并非拓扑性质，不过以后可以看到，这是所謂一致拓扑性質。

15.1* 設有距离空間(X, ρ)，(Y, ρ')，所謂映象$f: X \to Y$**为一致連續**，意指对于任意$\varepsilon > 0$，存在着一个$\delta > 0$，只要$\rho(x, x') < \delta$，便有$\rho'(f(x), f(x')) < \varepsilon$。

如果从(X, ρ)到(Y, ρ')的映象$f: X \to Y$为一致連續，則关于$(X, \mathfrak{D}_\rho)$与$(Y, \mathfrak{D}_{\rho'})$来講，映象$f$是連續的，但反过来未必为眞。

在两个距离空間(X, ρ)，(Y, ρ')，若$f: X \to Y$为完全1-1对应映象，如果f，f^{-1}都一致連續，則称(X, ρ)与(Y, ρ')**为一致同胚**。其次，凡距离空間(X, ρ)及与它一致同胚的距离空間所共有的性質，称为**一致拓扑的性質**。例如完全有界就是一致拓扑性質。

15.2 在距离空間(X, ρ)，(Y, ρ')中，如果X为緊空間而$f: X \to Y$为一連續映象，則f必为一致連續。

証明 由于f为連續，故对于任一个$\varepsilon > 0$，就存在着一个$\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$，使得$f(V_\rho(x, \delta)) \subset V_{\rho'}(f(x), \varepsilon/2)$。又因$X$为緊空間，从而可取有限个点$x_1, \cdots, x_n$，使得$X = \bigcup_{x \in X} V_\rho(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)/2)$。如果置$\delta = \min\{\delta(\varepsilon, x_1)/2, \cdots, \delta(\varepsilon, x_n)/2\}$，那么只要$\rho(x, x') < \delta$就有$\rho'(f(x), f(x')) < \varepsilon$。 **証畢**

15.3* 所謂距离空間(X, ρ)的点列$\{x_n\}$**为基本点列**，意指：对于$\varepsilon > 0$，存在一个n_0，只要$m, n \geqslant n_0$，便有$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$，即$\lim\limits_{m, n \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$。

如果点列$\{x_n\}$收斂，$\lim x_n = x$，則$\{x_n\}$为基本点列，反过来未必为眞。

15.4* 如果距离空間(X, ρ)中的所有基本点列都收斂，則称距离空間(X, ρ)**为完备**(complete)的。

距离空間的完备性不是拓扑性質，但是为一致拓扑性質。

15.5 距离空間 (X,ρ) 为完全有界的充要条件是：X 的任意无限子集合至少有一个基本点列 $\{x_n\}$（但在这里要假定，当 $i\neq j$ 时，$x_i\neq x_j$）。

証明跟 14.9 一样。

从 14.9 与 15.5 可导出如下的定理。

15.6 距离空間为紧的充要条件是：(X,ρ) 为完全有界而且完备。

〔問題〕 局部紧空間是完备的。特别，Euclid 空間 R^n 是完备的。

15.7 完备化定理 設 (X,ρ) 为任意距离空間，那么存在着具有下面性质的完备距离空間 (X^*,ρ^*)：

（i）存在着 1-1 对应映象（注意不一定为完全 1-1 对应）φ: $X\to X^*$，而且 $\rho(x,x')=\rho^*(\varphi(x),\varphi(x'))$ $(x,x'\in X)$。

（ii）$\overline{\varphi(X)}=X^*$。

（iii）满足(i)，(ii)条件的 (X^*,ρ^*) 是唯一的，即对于另外满足条件 (i)，(ii) 的完备距离空間 (X^{**},ρ^{**})，可以取一个完全 1-1 对应的等距映象 f: $X^*\to X^{**}$（即 $\dot{x},\dot{y}\in X$，$\rho^*(\dot{x},\dot{y})=\rho^{**}(f(\dot{x}),f(\dot{y}))$。

这时称 (X^*,ρ^*) 为 (X,ρ) 的**完备化**空間。

証明 仿效 Cantor 把有理数集 Q 构成实数集的方法，兹根据这个原則叙述如下：在 (X,ρ) 中取所有基本点列 $\mathfrak{x}=\{x_n\}$ 的全体为 $\mathfrak{X}$，对于 $\mathfrak{x}=\{x_n\}$，$\mathfrak{y}=\{y_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$ 則命 $\mathfrak{x}\sim\mathfrak{y}$，此处～表 $\mathfrak{X}$ 中的等价关系。$\mathfrak{X}$ 的商集合記为 $X^*=\mathfrak{X}/\sim$。凡是对应于 $\mathfrak{x}(\in\mathfrak{X})$ 的元素都用 $\tilde{\mathfrak{x}}(\in X^*)$ 来表示。其次置 $\rho^*(\tilde{\mathfrak{x}},\tilde{\mathfrak{y}})=\lim\rho(x_n,y_n)$，可証 (X^*,ρ^*) 为完备距离空間。再者，对于 $x\in X$，設 $\mathfrak{x}=\{x_n\}$ $(x_1=x_2=\cdots=x)$，并置 $\varphi(x)=\tilde{\mathfrak{x}}$，則 $\rho(x,x')=\rho^*(\varphi(x),\varphi(x'))$，易証 $\overline{\varphi(X)}=X^*$。至于唯一性之証明留給讀者。 証毕

15.8 Baire 定理 完备距离空間 $(X,\mathfrak{D})$ 是 Baire 空間。

証明 設 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$(\overline{E}_n)^\circ=\emptyset$ $(n=1,2,\cdots)$ 为 X 的第1类集合，现在要証 $X-E$ 为处处稠密。为此只要証，对于任意 $x\in X$，$V(x,\ \varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 必含有 $X-E$ 中的点。因为 $V(x,\ \varepsilon')$ $(0<\varepsilon'<\varepsilon)$ 必含 $\{E_n\}$ 中某一个集的点，如果不含所有 E_n 的点，则 $V(x,\ \varepsilon')$ 必含有 $X-E$ 的点，定理就被証明了。这里不妨設 $V(x,\ \varepsilon')$ 含有 E_1 的点。設 $x_1\in V(x,\varepsilon')-\overline{E}_1$，由于 $\overline{E}_1$ 是疏集合，故存在着 $\varepsilon_1>0$，滿足 $\overline{V(x_1,\ \varepsilon_1)}\subset V(x,\ \varepsilon')-\overline{E}_1$（在这里不妨取 $0<\varepsilon_1<\varepsilon'/2$ 的 ε_1，这是可以的，因为已知有 ε_1 存在，故比它更小的当然也成立）。同样，$\overline{V(x_2,\varepsilon_2)}\subset V(x_1,\varepsilon)-\overline{E}_2(0<\varepsilon_2<\varepsilon'/4)$，$\cdots$，$\overline{V(x_n,\varepsilon_n)}\subset V(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})-\overline{E}_n(0<\varepsilon_n<\varepsilon'/2^n)$，$\cdots$。这时不难看出 $\rho(x_n,x_{n-1})<\varepsilon'/2^n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，由此可見 $\{x_n\}$ 是一基本列。由于 X 是完备的，所以 $\lim x_n=y$ 存在。因为 $y\in\overline{V(x_n,\ \varepsilon_n)}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，且从所作 $V(x_n,\ \varepsilon_n)$ 的性质（即 $V(x_n,\ \varepsilon_n)$ 不含 $\bigcup_{n=1}^{n}E_n$ 的点）知 $y\in X-E$。其次 $y\in\overline{V(x,\ \varepsilon')}\subset V(x,\ \varepsilon)$。 証毕

§16 距离空間的构成

討我們来叙述一下从已知距离空間导出新的距离空間的方法。

16.1 在 n 維 Euclid 空間 R^n 可以定义若干互不相同的距离函数，那就是：对于 $x=\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$，$y=\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$，置

(i) $\rho^{(\infty)}(x,\ y)=\|x-y\|_\infty$，$\|x\|_\infty=\max\limits_{i=1,\cdots,n}|x_i|$。

(ii) $\rho^{(1)}(x,\ y)=\|x-y\|_1$，$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$。

(iii) $\rho^{(2)}(x,\ y)=\|x-y\|_2$，$\|x\|_2=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\right\}^{1/2}$。

(iv) 設 $1\leqslant p<\infty$，置

$$\rho^{(p)}(x, y) = \|x-y\|_p,\quad \|x\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}.$$

可把(ii)，(iii)看作是(iv)的特殊情形。

$\rho^{(p)}$ 是一距离函数，这可用下面的 Minkowski 不等式导出来。为此先証 Hölder 与 Minkowski 不等式。

在大家熟知的公式

$$|\alpha|\,|\beta| \leqslant (|\alpha|^p/p) + (|\beta|^q/q) \text{ ❶}$$

$$\left(这里\ p>1,\ q>1,\ 而\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\ \alpha,\ \beta\in R\right)$$

中，置 $\alpha=\dfrac{|x_i|}{A}$，$\beta=\dfrac{|y_i|}{B}$，$A=\|x\|_p$，$B=\|y\|_q$ 则得

$$|x_i|\,|y_i| \leqslant \frac{|x_i|^p A}{pA^{p-1}} + \frac{|y_i|^q B}{qB^{q-1}}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots n),$$

然后两边从 1 到 n 相加即得 $\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|\right\}^{1/q}$，由此立即得出：

Hölder 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right| \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|\right\}^{1/q}\left(p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

其次，先設 $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $x_i\geqslant 0$, $y_i\geqslant 0$, 則

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p &\leqslant \sum|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}+\sum|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}\\ &\leqslant \left[\{\sum|x_i|^p\}^{1/p}+\{\sum|y_i|^p\}^{1/p}\right]\{\sum(x_i+y_i)^{(p-1)q}\}^{1/q}\\ &= \left[\{\sum|x_i|^p\}^{1/p}+\{\sum|y_i|^p\}^{1/p}\right]\{\sum(x_i+y_i)^p\}^{1/q},\end{aligned}$$

---

❶ $\because\ t^{m-1}<1\ (t>1,\ 0<m<1) \Rightarrow \int_1^y t^{m-1}dt < \int_1^y dt \Rightarrow \dfrac{y^m-1}{m}<(y-1)$ $\Rightarrow y^m-1<m(y-1)\ (y>1,\ 0<m<1)$. 置 $y=a/b\ (a>0,\ b>0) \Rightarrow a^{1/p}b^{1/q}\leqslant a/p+b/q$，再設 $a=|\alpha|^p$, $b=|\beta|^q$ 即得 $|\alpha|\,|\beta|\leqslant|\alpha|^p/p+|\beta|^q/q$. ——譯者注

用 $\{\sum|x_i+y_i|^p\}^{1/q}$ 除之，即得

Minkowski 不等式

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right\}^{1/p}(1<p<\infty).$$

Minkowski 不等式对于 $p=1$, $p=\infty$ 也滿足。

上面所定义的許多距离函数是等价的，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，这可从

$$\rho^{(p)}(x, y)\geqslant\rho^{(q)}(x, y)$$

及　$\rho^{(\infty)}(x, y)\leqslant n\rho^{(1)}(x, y)$

导出来。

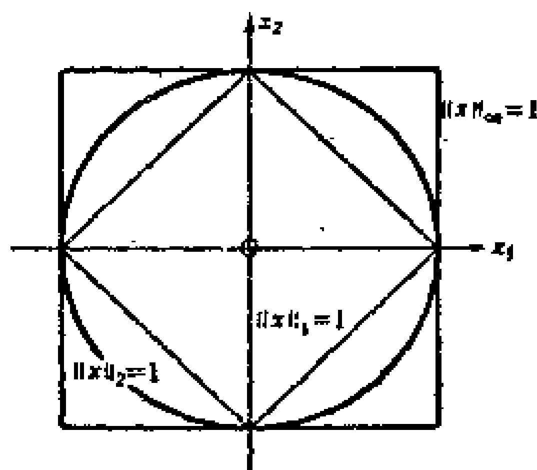


圖　16.1

［問題 1］ 試証 $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$.

［問題 2］ 設$(X_1,\rho_1),\cdots,(X_n,\rho_n)$为距离空間，置 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 及

$$\rho^{(p)}(x, y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i, y_i)^p\right\}^{1/p}$$

$(1\leqslant p\leqslant\infty)$，

則$(X,\rho^{(p)})$是距离空間。問 p 为何值时，它們互相等价？此外設$(X_1, \rho_1),\cdots,(X_n, \rho_n)$为完备空間，則$(X, \rho^{(p)})$也是完备空間。

16.2　距离空間(X_n, ρ_n) $(n=1,2,\cdots)$的直积空間 $X=\prod\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ 也是距离空間。譬如，对于 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$，只要置

$$\rho(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1+\rho_n(x_n, y_n)}$$

就成了。

［問題］ (X_n, ρ_n) $(n=1, 2, \cdots)$ 都是完备空間，那么 (X, ρ) 也是完备空間。

特别当 $X_n=R$ $(n=1, 2, \cdots)$ 时，置 $X=\prod\limits_{1}^{\infty}R=\{(x_1,x_2,\cdots);x_n\in R\}$ 就是一例。茲再举几个关于这样的距离空間的例子。

16.3　設 $l^{(p)}=\{x;\ x\in X,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty\}$ $(1\leqslant p<\infty)$,

若置

$$\rho^{(p)}(x, y)=\|x-y\|_p, \ \|x\|_p=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right\}^{1/p},$$

那么$(l^{(p)}, \rho^{(p)})$是完备距离空間。

証明 $(l^p, \rho^{(p)})$为距离空間之証明可由 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式导出来，这里所謂

Hölder 不等式就是对于$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, $q>1$, $x\in l^{(p)}$, $y\in l^{(q)}$有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n\right|\leqslant\|x\|_p\cdot\|y\|_q.$$

所謂 **Minkowski 不等式**就是对于$p\geqslant 1$, x, $y\in l^{(p)}$有

$$\|x+y\|_p\leqslant\|x\|_p+\|y\|_p.$$

这两个不等式可完全仿照与R^n空間的情形来証明。現在来証明$l^{(p)}$的完备性。設$x^{(n)}\in l^{(p)}$, $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x^{(n)}-x^{(m)}\|_p=0$。(i)对于任意$k$有$\lim\limits_{m,n\to\infty}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_k^{(n)}=x_k$存在。(ii)置$x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$，那么有$x\in l^{(p)}$。事实上，由于$\{x^{(n)}\}$是$l^{(p)}$的基本列，故存在一个$K>0$，使得$\|x^{(n)}\|_p<K\ (n=1, 2, \cdots)$。由此可見，对于任意$k$都有：$\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i|^p=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i^{(n)}|^p\leqslant\overline{\lim}\|x^{(n)}\|^p\leqslant K^p$。这就是說$\|x\|_p<K$，$\therefore\ x\in l^{(p)}$。(iii)同样，对于$\varepsilon>0$，存在着$n_0$，只要$m, n>n_0$，便有$\|x^{(n)}-x^{(m)}\|_p\leqslant\varepsilon$，若$n\to\infty$，就导出$\|x-x^m\|_p\leqslant\varepsilon$，那就是說$\lim\limits_{n\to\infty}\|x^{(n)}-x\|_p=0$。 証畢

16.4 $l^{(\infty)}=\{x; x\in X, \sup\{|x_n|; n=1, 2, \cdots\}<+\infty\}$，若置 $\rho^{(\infty)}(x, y)=\|x-y\|_\infty$, $\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|; n=1, 2, \cdots\}$，那么$(l_\infty, \rho_\infty)$也是完备距离空間(这一点留給讀者証明)。

下面討論映象(函数)空間。

16.5 設$(X, \mathfrak{O})$是拓扑空間，(Y, ρ)是一距离空間，置

$C(X, Y)=\{f;\ f: X \to Y$ 为連續而有界的映象(即 $\delta(f(X))<\infty\}$.

对于 $f, g \in C(X, Y)$, 則置

$$\rho_C(f, g)=\sup\{\rho(f(x), g(x));\ x \in X\},$$

那么 $(C(X, Y), \rho_C)$ 也是距离空間。

例 当 Y 为 R 的时候, $C(X, Y)=C(X, R)$ 是定义在 X 上的有界实連續函数的全体,若 $\lim \rho_C(f_n, f)=0$, 則 f_n 一致收斂于 f.

应用实变函数論中的著名定理(一致收斂的連續函数列的极限亦是連續函数)可引出下列定理:

16.6 設 (Y, ρ) 为完备距离空間,則 $(C(X, Y), \rho_C)$ 也是完备距离空間。

下面定理应用很广:

16.7 Ascoli-Arzelà 定理 設 (X, ρ) 为緊的距离空間,設 $\mathfrak{F}=\{f_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} \subset C(X, R)$, 則 $\mathfrak{F}$ 为完全有界(完全緊)(即对于 $\mathfrak{F}$ 的任意无限子叙列,可取出关于 ρ_C 的收斂子叙列来)的充分与必要条件是: $\mathfrak{F}$ 为一致有界而且同程度一致連續。

这里所謂一致有界,意思就是說:存在着一个 $N>0$, 使得 $\rho_C(f, 0)<N\ (f \in \mathfrak{F})$. 这里所謂同程度一致連續,意思就是說:对于任意 $\varepsilon>0$, 可选取 $\delta>0$ (与 $f \in \mathfrak{F}$ 无关), 只要 $\rho(x, y)<\delta$, 使有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon\ (f \in \mathfrak{F})$.

証明 (必要性)設 $\mathfrak{F}$ 为完全有界(完全緊),則对于任意 $\varepsilon>0$, 可取 $f_{\lambda_1}, \cdots, f_{\lambda_k}$ 使得 $\mathfrak{F} \subset V(f_{\lambda_1}, \varepsilon) \cup \cdots \cup V(f_{\lambda_k}, \varepsilon)$. 由此可見,任意 $f \in \mathfrak{F}$ 必定含于某一个 $V(f_{\lambda_i}, \varepsilon)$, 即 $f \in V(f_{\lambda_i}, \varepsilon)$. 所以 $\rho_C(f, 0) \leq \rho_C(f_{\lambda_i}, 0)+\rho_C(f_{\lambda_i}, f) \leq M+\varepsilon$, 此处 $M=\sup\{\rho_C(f_{\lambda_i}, 0)\};\ i=1, 2, \cdots\}$. 这就証明了 $\mathfrak{F}$ 为一致有界。由于 $f_{\lambda_i}(x)$ $(i=1, 2, \cdots k)$ 是連續函数,故 $f_{\lambda_1}, \cdots, f_{\lambda_k}$ 在 X 上是一致連續的,由此可知,对于任意 $\varepsilon>0$, 可选取 $\delta>0$, 使得当 $\rho(x, x')<\delta$

时，$|f_{\lambda_i}(x)-f_{\lambda_i}(x')|<\varepsilon(i=1, 2, \cdots, k)$。现在对任意一个 $f_\lambda\in\mathfrak{F}$，不妨設 $f_\lambda\in V(f_{\lambda_i}, \varepsilon)$，則 $|f_\lambda(x)-f_\lambda(x')|\leqslant|f_\lambda(x)-f_{\lambda_i}(x)|+|f_{\lambda_i}(x)-f_{\lambda_i}(x')|+|f_{\lambda_i}(x')-f_\lambda(x')|<3\varepsilon$。这就是說 $\mathfrak{F}$ 是同程度一致連續的。

(充分性)从 $\mathfrak{F}$ 的一致有界可知存在着一个 $N>0$，使得 $\rho_C(f_\lambda, 0)\leqslant N(f_\lambda\in\mathfrak{F})$。因此对于任意一个 $x\in X$，可知 $\{f_\lambda(x); f_\lambda\in\mathfrak{F}\}$ 为有界，而对于任意一个 $x\in X$，都可取收斂子列 $\{f_n(x)\}$。其次因为 X 是紧的，故知 X 为可分，卽存在着一个 $A=\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$，使得 $\overline{A}=X$。由上可知 $\{f(x_k), f\in\mathfrak{F}\}$ 都有界，首先考虑 x_1，卽 $\{f(x_1), f\in\mathfrak{F}\}$ 为有界，卽可取收斂子列，記为 $\{f_{\lambda_n}^{(1)}(x_1)\}$。其次因 $\{f_{\lambda_n}^{(1)}(x_1)\}$ 也为有界，故又可以取一收斂子列，記之为 $\{f_{\lambda_n}^{(2)}(x_2)\}$，…依此継續下去，卽有

$$f_{\lambda_1}^{(1)}(x_1), f_{\lambda_2}^{(1)}(x_1), \cdots, f_{\lambda_n}^{(1)}(x_1)\cdots$$
$$f_{\lambda_1}^{(2)}(x_2), f_{\lambda_2}^{(2)}(x_2), \cdots, f_{\lambda_n}^{(2)}(x_2)\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{\lambda_1}^{(n)}(x_n), f_{\lambda_2}^{(n)}(x_n), \cdots, f_{\lambda_n}^{(n)}(\lambda_n)\cdots$$

我們利用对角綫方法，取函数列 $f_{\lambda_1}^{(1)}(x), f_{\lambda_2}^{(2)}(x), \cdots, f_{\lambda_n}^{(n)}(x_1), \cdots$ 卽 $\{f_{\lambda_n}^{(n)}(x)\}(\in\mathfrak{F})$。由上面的作法，知 $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\lambda_n}^{(n)}(x_k)=a_k(k=1, 2, \cdots)$ 存在。现在証 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho_C(f_{\lambda_m}^{(m)}, f_{\lambda_n}^{(n)})=0$。另一方面，因 $\mathfrak{F}$ 是同程度一致連續，故对于任意給定的 $\varepsilon>0$，存在着一个 $\delta>0$，只要 $\rho(x, x')<\delta$，便有 $|f_\lambda(x)-f_\lambda(x')|<\varepsilon$，$(f_\lambda\in\mathfrak{F})$。其次 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}V(x_i, \delta)$；按照假設 X 为紧的，故有 $X=V(x_1, \delta)\cup\cdots\cup V(x_k, \delta)$ (这里 k 为有限的某一个数)。此外，对于 $x_1, \cdots, x_k$，一定存在着一个 n_0，只要 $m, n\geqslant n_0$，便有 $|f_{\lambda_m}^{(m)}(x_i)-f_{\lambda_n}^{(n)}(x_i)|<\varepsilon(i=1, 2, \cdots, k)$。这时，对于任意的 $x\in X$，假定 $x\in V(x_j, \delta)$ $(1\leqslant j\leqslant k)$，則当 $m, n\geqslant n_0$ 时，便有

$$|f_{\lambda_m}^{(m)}(x)-f_{\lambda_n}^{(n)}(x)|\leqslant|f_{\lambda_m}^{(m)}(x)-f_{\lambda_m}^{(m)}(x_j)|+|f_{\lambda_m}^{(m)}(x_j)-f_{\lambda_n}^{(n)}(x_j)|$$
$$+|f_{\lambda_n}^{(n)}(x_j)-f_{\lambda_n}^{(n)}(x)|<3\varepsilon。\quad 即\ \rho_C(f_{\lambda_m}^{(m)},f_{\lambda_n}^{(n)})\leqslant 3\varepsilon.$$

由此 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho_C(f_{\lambda_m},f_{\lambda_n})=0$，也就是在 $\mathfrak{F}$ 中可以取出一个基本列 $\{f_{\lambda_n}^{(n)}(x)\}$。故 X 为完全有界(完全緊)。 證毕

一般来講，所謂在拓扑空間 $(X,\mathfrak{O})$ 定义的实連續函数集 $\mathfrak{F}=\{f_\lambda(x);\lambda\in\Lambda\}$，在点 x 同程度連續，意指对于任意 $\varepsilon>0$，可以取得 x 的一个邻域 U，使得对于所有 $y\in U$，以及所有 $f_\lambda\in\mathfrak{F}$ 都有 $|f_\lambda(x)-f_\lambda(y)|<\varepsilon$。此外，$\mathfrak{F}$ 在 X 的每一点都同程度連續时，則称 $\mathfrak{F}$ 在 X 同程度連續。与 15.2 一样，設 (X,ρ) 为緊空間，則 $\mathfrak{F}$ 在 X 同程度連續与 $\mathfrak{F}$ 在 X 同程度一致連續是等价的。

§17 Banach 空間，Hilbert 空間

在 §16 中列举的几个距离空間的例子，其中的大多数不仅是距离空間，而且还是所謂如下的 Banach 空間。

17.1* 若集合 X 满足下述条件，称 X 为 **Banach 空間**。

(i) 在 X 中定义着加法 $x+y$ 及数积 λx(λ 为实数)，X 是一向量空間。

(ii) 对于所有的 x，有一个范数(norm) $\|x\|\in R$ 与之对应，这范数满足：

(a) $\|x\|\geqslant 0$, $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$ (向量空間的 0 元)。

(b) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ $(x,y,\in X)$。

(c) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ $(x\in X,\lambda\in R)$。

从而置 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，則 (x,ρ) 为距离空間。

(iii) (X,ρ) 是完备距离空間。

茲举 Banach 空間的例如下：

例 1 如果 Euclid 空間的范数象 16.1 节那样定义 $\|x\|_p(1\leqslant p<\infty)$，及 $\|x\|_\infty$，則 R^n 是以这些为范数的 Banach 空間。

例 2 16.3 的 $l^{(p)}(1\leqslant p<\infty)$ 是以 $\|x\|_p$ 为范数的 Banach 空間。此外 16.4 的 $l^{(\infty)}$ 关于范数 $\|x\|_\infty$ 亦成为 Banach 空間。

證明 首先必須証明 $l^{(p)}$ (及 $l^{(\infty)}$) 是一向量空間。从 Minkowski 不等式易知，若 $x, y \in l^{(p)}$，則 $x+y \in l^{(p)} (\in l^{(\infty)})$。其次若 $x \in l^{(p)} (\in l^{(\infty)})$，那么 $\lambda x \in l^{(p)} (\in l^{(\infty)})$ 是很显然的了。至于(ii),(iii) 的証明巳在 16.3 讲过。 証毕

例 3 設 $(X, \mathfrak{O})$ 为拓扑空間，$C(X)$ 表示定义在 X 上的有界連續函数的全体。对于 $f \in C(X)$，置

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in X\},$$

則 $C(X)$ 是以 $\|f\|$ 为范数的 Banach 空間。

兹举不是 Banach 空間，但有近似于 Banach 空間性質的例如下：

例 1 $l = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots): x_n \in R\} = R^1$，置

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1+|x_n|},$$

則 l 的范数除不滿足 Banach 空間的性質(iic) 即 $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ 外，对其他各点全部都滿足。

例 2 在 $X = [0, 1]$ 中定义的連續函数的全体，記为 $C(X)$，置

$$\|f\|_p = \left\{\int_0^1 |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

則 $C(X)$ 滿足 Banach 空間的性質 (i), (ii)，但不滿足 (iii)。

Banach 空間的实例很多，而且大多容易处理，因此它的性質易于理解，并已在广泛应用。上面的例 1 虽然不是 Banach 空間，但很近似，因之 Banach 空間的理論中有許多都成立。例 2 缺少完备性，依照 15.7 可使它完备化而成为一个 Banach 空間。但不能仅由于抽象的扩大而构成 Banach 空間，既要考虑不連續函数代替連續函数，也要考虑积分定义扩張的問題，这实际上就是求包含有定义在 X 上的函数集合 C 的 Banach 空間的問題。要解决这个問題，就需要 Lebesgue 积分理論(参看第 5 章)。

在 Banach 空間中，有所謂 Hilbert 空間，那是 Euclid 空間的很重要的扩充(有时称为无限維的 Euclid 空間)。

17.2* 集合 X，如果滿足如下的条件 (i)～(iii)，則称为 **Hilbert 空間(或称广义的 Euclid 空間)：**

(i) X 为向量空間($\lambda \in R$)。

(ii) 对于 $x, y \in X$，定义着一个內积 $(x, y) \in R$，并滿足：

(a) $(x, y) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (向量空間的 0 元)。

(b) $(x, y)=(y, x)$.

(c) $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$.

(d) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$.

若置 $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$，那就有范数的性質（17.1*, (ii)），由此 $\rho(x, y)=\|x-y\|$ 为距离函数。

(iii) X 关于距离 ρ 是完备的。

現在我們来証明 $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ 是一范数。事实上，

$$0\leqslant(\lambda x+y, \lambda x+y)=\lambda^2(x, x)+2\lambda(x, y)+(y, y),$$

右边是 λ 的 2 次式。因此有判别式 $(x, y)^2-(x, x)(y, y)\leqslant 0$，即得所謂 Schwarz 不等式：

$$(x, y)^2\leqslant(x, x)(y, y).$$

由此可得

$$\|x+y\|^2=(x+y, x+y)=(x, x)+2(x, y)+(y, y)\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2,$$

即
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

通常称 Hilbert 空間为无限維的向量空間。

例 設 $x=(x_1, x_2, \cdots)$，$y=(y_1, y_2, \cdots)$ 为 $l^{(2)}$ 中的任意二元素，作关于 Hilbert 空間的內积

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n.$$

事实上，上式的右边是收斂的，这可由

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}y_n^2<\infty,\quad \left|\sum_{n=m}^{r}x_n y_n\right|\leqslant\left(\sum_{n=m}^{r}x_n^2\right)\left(\sum_{n=m}^{r}y_n^2\right)\to 0\quad(m, r\to\infty)$$

看出来。

关于 Hilbert 空間及 Banach 空間的理論可参看本講座吉田耕作著：位相解析（中譯本为"泛函分析"）。此外，由于最近广义函数理論的发展，所以除 Banach 空間外，拓扑綫性空間的理論也成为重要的了，这可参看本讲座料村联著：超函数（中譯本为"广义函数"）。

第 4 章 測　度

§18 緒　論

設 C 为定义在区間 $[0, 1]=X$ 上的实連續函数的全体，当 $f, g\in C$ 时，置

$$(f, g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad \|f\|=(f, f)^{1/2}.$$

那末空間 C 具有如 17.2* 中所述的Hilbert 空間的大部分性質，但不具 (iii) 的完备性。利用 15.7 的方法，若将 C 关于 $\rho_2(f, g)=\|f-g\|$ 进行完备化，則所得空間中的点并不能用定义在 $[0, 1]$ 上的函数来表示。将积分概念扩張后，設关于 Lebesgue 2 次(平方)可积的全体記为

$$L^{(2)}=\left\{f(t);\ \int_0^1 |f(t)|^2dt<+\infty\right\},$$

則 $L^{(2)}$ 显然构成 Hilbert 空間(参看 §26)。虽然这是 Lebesgue 积分重要性的一例，但此时必要的是，对于函数 $f(t)$ 就有一个实数 $L(f)$：

$$L(f)=\int_0^1 f(t)dt$$

与之对应，而且 $L(f)$ 具有若干很重要的性質。至于 $L(f)$ 是否能由通常的积分处理方法而得到，这一点并不是特别必要的。例如 $f(t)$ 并不是連續函数，但可以用連續函数列 $f_n(t)$ 的极限 $\lim f_n(t)=f(t)$ 表达出来。若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)dt=\alpha$ 存在，就可用令 $L(f)=\alpha$ 之类的方法来确定 $L(f)$. 事实上，这样的方法可以設計出很多种。

然而，我們不仅仅限于积分概念的扩充，而面积和体积即所謂

測度的概念有时也要扩充。例如，近代概率論中的所謂概率，就不外乎是（抽象的）測度。它不单純限于平面及空間的集合的測度，也涉及到无限維空間和函数空間的測度。为了这个目的，就有必要回到一般集合論的立場上来建立測度理論。以下，在普遍考察測度之前，先回忆一下到現在为止在微积分学中所用过的測度（measure）。

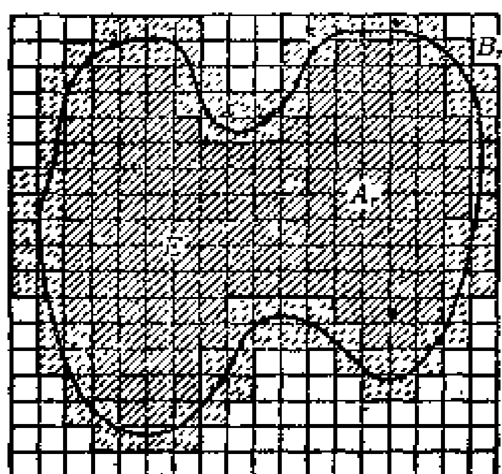


图 18.1

首先温习一下关于 Jordan 測度。在平面上作正交軸，象图 18.1 那样，把它分割成边长为 r 的小正方形。設 E 为平面上的有界集，命 A_r 表示完全含在 E 中的小正方形的全体的总面积，以 B_r 表示凡与 E 有公共点的小正方形的全体的总面积。若当精細分割至 $r \to 0$ 时，置

$$\underline{v}(E) = \overline{\lim_{r\to 0}}\, A_r, \quad \overline{v}(E) = \underline{\lim_{r\to 0}}\, B_r,$$

則称 $\underline{v}(E)$ 为 E 的 **Jordan 內測度**，$\overline{v}(E)$ 为 E 的 **Jordan 外測度**。一般来講，$\underline{v}(E) \leqslant \overline{v}(E)$。如果 $\underline{v}(E) = \overline{v}(E)$，則称 E 为 **Jordan 可測集合**，用 $v(E)$ 表示它的值，这时称 $v(E)$ 为 E 的 **Jordan 測度**。[$\underline{v}(E)$ 与 $\overline{v}(E)$ 的値不依賴于平面上正交軸的作法。] 以上所講虽然仅仅是平面上的集合，但对直綫上与空間上的 Jordan 測度的討論也是相同的。

18.1 設 $\mathfrak{K}$ 为（平面上）有界 Jordan 可測集合的全体，

I 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{K}$，則 $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{K}$；

II 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{K}$，則 $E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{K}$；

III 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{K}$，又 $E_1 \subset E_2$，則 $E_2 - E_1 \in \mathfrak{K}$；

IV 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{K}$，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，則

$$v(E_1 \cup E_2) = v(E_1) + v(E_2).$$

(这里的証明从略。应用 $\bar{v}(E) = \underline{v}(E) \Leftrightarrow \bar{v}(E') = 0$ 来証明上列各点是很容易的。)

另一方面，还有許多 Jordan 不可測的集合，比方，在直綫 R 上，以 Q_1 表示 $[0, 1]$ 所含的有理数集合，則 $\bar{v}(Q_1) = 1$, $\underline{v}(Q_1) = 0$. 由此可見:

V 若 $E_1, E_2, \cdots \in \mathfrak{R}$, 則 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{R}$ 未必一定成立。

我們先討論一維空間的情形。由于 Jordan 測度对于上面的性質"V"不一定成立，因此来考慮它的改进方法。首先，設定义有界集測度的原則为

(i) $m([0, 1]) = 1$, $m(\emptyset) = 0$;

(ii) 若 E_1 与 E_2 可合同时，則 $m(E_1) = m(E_2)$;

(iii) 若 $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$，則 $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$.

虽然对于直綫上的所有有界集合 E 不一定有 $m(E)$ 的值，但能够确定下面所考察的集合 E 的測度 $m(E)$ 的值。若 I 表示长为有理数 r 的区間，則从 (i), (ii), (iii) 可得 $mI = r$. 同样，若 I 是长为无理数 α 的区間，則也有 $mI = \alpha$. 因为（有界）开集合 O 可表示为 $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i (I_i \cap I_j = \emptyset, i \neq j)$（卽 O 可表成充其量为可数个区間 I_i 的和集），因此从 (iii) 可知 $m(O) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$. 設 A 为包含在 $[0, 1]$ 上的閉集合，則有 $A = [0, 1] - O$（O 为开集合），于是定义: $m(A) = 1 - m(O)$. 若 $A \subset E \subset O$ 而 A 为閉集合，O 为开集合，則必有 $m(A) \leqslant m(E) \leqslant m(O)$. 現在对于任意 E 置 $\overline{m}(E) = \inf \{m(O); F \subset O$: 开集合$\}$, $\underline{m}(E) = \sup \{m(A); E \supset A$: 閉集合$\}$. 我們分別称 $\overline{m}(E)$, $\underline{m}(E)$ 为 Lebesgue 的外測度与 Lebesgue 的內測度。一般情形下有: $\overline{m}(E) \geqslant m(E) \geqslant \underline{m}(E)$，特别是，如果

$$\overline{m}(E)=\underline{m}(E)$$

这时称 E 为 **Lebesgue 可測集**(measurable set)，并称 $m(E)$ 为 E 的 **Lebesgue 測度**。如果我們仅考虑有界的 Lebesgue 可測集的全体，则下面的定理成立(証明見 §21)。

18.2 設直綫上有界的 Lebesgue 可測集的全体为 $\mathfrak{B}$,

I 若 $E_1, E_2, \cdots\cdots \in \mathfrak{B}$，而且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 为有界，则 $E\in\mathfrak{B}$;

II 若 $E_1, E_2\in\mathfrak{B}$，則 $E_1\cap E_2\in\mathfrak{B}$;

III 若 $E_1, E_2\in\mathfrak{B}$，$E_1\subset E_2$，則 $E_2-E_1\in\mathfrak{B}$;

IV 在 (I) 的条件下，如果 $E_i\cap E_j=\emptyset\,(i\neq j)$，則

$$m(E)=\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

拿这些性質和 Jordan 測度作一比較，可知性質(I)及(IV)已改进了。一般来講，凡是 Jordan 可測的必然 Lebesgue 可測，反之未必为眞。至于上面的改进对于积分有何影响，那将在第5章中叙述。以上我們研究了直綫上与平面上集合的測度，現在更系統地、更一般地来討論集合 X 的子集合的測度，然后在 §21 中应用这些結果来討論具体問題。

§ 19 Borel 集合体，Lebesgue 式測度

現在回到一般的集合来討論(在这一节中并不假定 X 一定为拓扑空間)。

19.1* 設有集合 X，如 $\mathfrak{K}\in\mathfrak{P}(X)$ 满足下列条件，就称 $\mathfrak{K}$ 为**集合体**:

(i) $X, \emptyset\in\mathfrak{K}$;

(ii) 若 $A, B\in\mathfrak{K}$，則 $A\cup B\in\mathfrak{K}$;

(iii) 若 $A, B\in\mathfrak{K}$，則 $A\cap B\in\mathfrak{K}$;

(iv) 若 $A\in\mathfrak{K}$, 則 $A^c(=X-A)\in\mathfrak{K}$.

(这些条件比 18.1 的 $\mathfrak{K}$ 性质稍为强一些。)

$\mathfrak{K}$ 为集合体的充要条件是: (i′) $\mathfrak{K}\neq\emptyset$, (ii′)=(ii), (iii′)=(iv).

19.2* 一般,設 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{P}(X)$, 定义:

$$\overline{\lim}\, A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{\lim}\, A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,$$

即 $x\in\overline{\lim}\, A_n\Leftrightarrow$ 存在着无限个如下的 $n_1<n_2<\cdots<\cdots$, 使得 $x\in A_{n_i}(i=1, 2, \cdots)$;

$x\in\underline{\lim}\, A_n\Leftrightarrow$ 存在着一个 $n_0=n_0(x)$,只要 $n=n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots$, 便有 $x\in A_n$。容易看出

$$\underline{\lim}\, A_n\subset\overline{\lim}\, A_n,\quad \overline{\lim}\, A_n=(\underline{\lim}\, A_n^c)^c,\quad \underline{\lim}\, A_n=(\overline{\lim}\, A_n^c)^c.$$

特别是当 $\overline{\lim}\, A_n=\underline{\lim}\, A_n$ 时,記之为

$$\lim A_n.$$

若 $\lim A_n$ 存在,則 $\lim A_n=(\lim A_n^c)^c$. 特别是,若 $A_1\supset A_2\supset\cdots$,則有 $\lim A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, 若 $A_1\subset A_2\subset\cdots$, 則 $\lim A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

[問題 1] 設 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{K}$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 那么 A 可用互不相交的 $B_1, B_2, \cdots\in\mathfrak{K}$ 来表示,即 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ (这里 $B_i\cap B_j=\emptyset$).

[問題 2] 对于集合 $A(\subset X)$, 如果定义了它的特征函数 $c_A(x)=1$, $(x\in A)$; $c_A(x)=0\,(x\in A^c)$, 那么,下面等式成立:

$$c_{\overline{\lim}\, A_n}(x)=\overline{\lim}\, c_{A_n}(x),\quad c_{\underline{\lim}\, A_n}(x)=\underline{\lim}\, c_{A_n}(x).$$

下面是比集合体更强的性质:

19.3* 所謂 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{P}(X)$ 为 **Borel 集合体**,是指: (i) $\mathfrak{B}$ 为集合体, (ii) 若 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{B}$, 則 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 及 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 也属于 $\mathfrak{B}$ (比 18.2 的 $\mathfrak{B}$ 的条件来得少)。

不言而喻,若 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{B}$, 則 $\overline{\lim}\, A_n$, $\underline{\lim}\, A_n$ 也属于 $\mathfrak{B}$.

[問題1] 試証 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{P}(X)$ 为 Borel 集合体的必要与充分条件是：(i′) $\mathfrak{B}\neq\emptyset$，(ii′) $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{B}$，則 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{B}$，(iii′) $A\in\mathfrak{B}$，則 $A^c\in\mathfrak{B}$。

[問題2] $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{P}(X)$ 为 Borel 集合体的充要条件是：(i″) $\mathfrak{B}\neq\emptyset$，(ii″) $A_1, A_2\in\mathfrak{B}$，則 $A_1\cap A_2\in\mathfrak{B}$，(iii″) 若 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{B}$，$A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j)$，則 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{B}$，(iv″) 若 $A\in\mathfrak{B}$，則 $A^c\in\mathfrak{B}$。

19.4 对于任意一个集合族 $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{P}(X)(\mathfrak{F}\neq\emptyset)$，存在着含 $\mathfrak{F}$ 的最小集合体 $\mathfrak{K}_0=K(\mathfrak{F})$ 和含 $\mathfrak{F}$ 最小的 Borel 集合体 $\mathfrak{B}_0=B(\mathfrak{F})$。

証明 取含有 $\mathfrak{F}$ 的所有集合体 $\mathfrak{K}(\subset\mathfrak{P}(X))$ 的交集 $\mathfrak{K}_0=K(\mathfrak{F})$，則 $\mathfrak{K}_0$ 就是所求的最小集合体，同样可得最小的 Borel 集合体 $\mathfrak{B}_0=B(\mathfrak{F})$。 **証毕**

[問題] 設有 $\mathfrak{F}$，置 $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}\cup\{F^c;\ F\in\mathfrak{F}\}$，$\mathfrak{F}_2=\{A_1\cap A_2\cdots\cap A_n;\ n=1, 2, \cdots, A_i\in\mathfrak{F}_1\}$，$\mathfrak{F}_3=\{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n;\ n=1, 2, \cdots, A_i\in\mathfrak{F}_2\}$，那么 $\mathfrak{F}_3=K(\mathfrak{F})$。

19.5 設 $X=R$，$\mathfrak{F}^1=\{[a, b);\ -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty\}$❶，則

$$K(\mathfrak{F}^1)=\{[a_1, b_1)\cup[a_2, b_2)\cup\cdots\cup[a_n, b_n);\ n=1, 2, \cdots,$$
$$-\infty\leqslant a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n\leqslant+\infty\}❶.$$

我們称 $B(\mathfrak{F}^1)=\mathfrak{B}^1$ 为1維 Borel 集合体，称 $E\in\mathfrak{B}^1$ 为1維 Borel 集合。由此可見：

$$(a, b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b\right),\ [a, b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a, b+\frac{1}{n}\right),$$

$$(a, b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b\right]$$

及任意开集 $O=\bigcup_{n}(a_n, b_n)$，閉集合 $A=R-O$，都属于 $\mathfrak{B}^1$。此外，

$$G_\delta\text{ 集合 } E=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n\qquad(O_1\supset O_2\supset\cdots)❷;$$

$$F_\sigma\text{ 集合 } E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\qquad(A_1\subset A_2\subset\cdots)❸$$

❶ 此处应为：$-\infty<a<b\leqslant-\infty$，$-\infty<a_1<b_1<\cdots$。——校者注

❷ 此处应为：($O_1\supset O_2\supset\cdots$ 为开集合)。——校者注

❸ 此处应为：($A_1\subset A_2\subset\cdots$ 为閉集合)。——校者注

也属于 $\mathfrak{B}^1$.

19.6 若 $X=R^n$, 置

$$\mathfrak{J}^n=\{[a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n);\\ -\infty\leqslant a_i<b_i\leqslant+\infty,\ i=1,\cdots,n\}$$ ❶,

但这里假定

$$[a_1,\cdots,a_n;\ b_1,\cdots,b_n)=\{(x_1,\cdots,x_n);a_i\leqslant x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n\},$$

則 $K(\mathfrak{J}^n)$ 成为这些不相交的区間❷的有限和集的全体。

設 $\mathfrak{B}^n=B(\mathfrak{J}^n)$, 則称 $\mathfrak{B}^n$ 为 **n 維 Borel 集合体**, 称 $E\in\mathfrak{B}^n$ 为 **n 維 Borel 集合**。

[問題] R^n 的所有开集合, 閉集合, G_δ 集合, F_σ 集合都属于 $\mathfrak{B}^n$.

現在来定义 Lebesgue 式測度❸。首先规定記号∞的运算:

$$\infty+a=\infty,\quad \infty+\infty=\infty,\quad \lim\infty=\infty \qquad (a\in R),$$

$$-\infty+a=-\infty,\quad -\infty+(-\infty)=-\infty,\quad \lim-\infty=-\infty \qquad (a\in R),$$

$$a\times(\pm\infty)=\pm(\operatorname{sgn}a)\infty\quad(a\neq0),\quad 0\times\infty=0,$$

但是 $(\pm\infty)-(\pm\infty)$ 是沒有定义的。

19.7* 設有集 X, 并設 $\mathfrak{B}\,(\subset\mathfrak{P}(X))$ 是一 Borel 集合体。如对每一 $A\in\mathfrak{B}$, 有一值 $m(A)$ 与之对应 $(0\leqslant m(A)\leqslant\infty)$, 并滿足:

M I $m(\emptyset)=0$,

MII 設 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{B}$, $A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)$, 則

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n),$$

这时就說在 $\mathfrak{B}$ 上定义了 **Lebesgue 式測度** m. 如把集合 X, $\mathfrak{B}$ 以及 m 合并一起来考虑, 則称它为**測度空間**, 記为

$$(X,\ \mathfrak{B},\ m).$$

---

❶ 此处应为: $-\infty<a_i<b_i\leqslant+\infty$. ——校者注

❷ 这些区間不必是不相交的, 应删去"不相交的"。——校者注

❸ 在 §18 中論及的測度, 它的值是异于 $+\infty$ 的。

特别是，当 $m(X)<\infty$ 时，称 m 为有界测度。此外，$m(X)=\infty$，而且 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_n\in\mathfrak{B}$，$m(E_n)<\infty$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的情形往往也是很重要的。这时称 m 为准有界测度。

今后仅說測度时，就是指 Lebesgue 式測度而言。

測度空間 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 定义之后，下面就来討論它的性質。以下所考虑的集合 $A, B, \cdots$，除特别注明外，都是属于 $\mathfrak{B}$ 的集合。

19.8　若 $A\subset B$，那么 $m(A)\leqslant m(B)$。一般来說，

$$m(A)+m(B)=m(A\cup B)+m(A\cap B).$$

証明　如果把 A, B 写成：$A=(A\cap B)\cup(A-A\cap B)$，$B=(A\cap B)\cup(B-A\cap B)$，那么 $m(A)+m(B)=m(A\cap B)+m(A-A\cap B)+m(A\cap B)+m(B-A\cap B)=m(A\cap B)+m(A\cup B)$。　　**証毕**

19.9　　$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n).$$

証明　若置 $B_n=A_n-(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})$ $(n=1, 2, \cdots)$，就有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,\quad B_n\subset A_n,\quad B_i\cap B_j=\emptyset\quad(i\neq j),$$

由此得　$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$。　**証毕**

19.10　(i) 若 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，则 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim m(A_n)$。

(ii) 若 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$；$m(A_1)<\infty$，则

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim m(A_n).$$

(iii) 一般来說，有下列不等式成立：

$$m(\underline{\lim}\,A_n)\leqslant\underline{\lim}\,m(A_n).$$

(iv) 若 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)<+\infty$，则 $m(\overline{\lim}\,A_n)\geqslant\overline{\lim}\,m(A_n)$。

(v) 特别是，若 $A=\lim A_n$ 而且 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)<\infty$，则

$$m(A)=\lim m(A_n)。$$

証明 (i) 置 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1\cup(A_2-A_1)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n-1})\cup\cdots$，那么右边各项不相交，由此 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n-A_{n-1})$（設 $A_0=\emptyset$）。此外因 $m(A_n)=\sum_{i=1}^{n} m(A_i-A_{i-1})$，于是 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\lim m(A_n)$。

(ii) 置 $B_n=A_1-A_n\ (n=1,2,\cdots)$，因 $B_1\subset B_2\subset\cdots$，按照性質(i)，有 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)=\lim_{n\to\infty} m(B_n)=m(A_1)-\lim_{n\to\infty} m(A_n)$。另外一方面，因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=A_1-\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，故有 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)=m(A_1)-m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$。由此可見，从 $m(A_1)<\infty$ 就得(ii)。

(iii) 若置 $B_n=\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$，那么 $B_n\subset A_n$，而且 $B_1\subset B_2\subset\cdots$。所以，由性質(i)可得 $m(\underline{\lim} A_n)=m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)=\lim m(B_n)\leq \underline{\lim}\, m(A_n)$。

(iv) 如果設 $B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$，就有 $A_n\subset B_n$，而且 $B_1\supset B_2\supset\cdots$，由假定 $m(B_1)<\infty$，故按照(ii)即得 $m(\overline{\lim} A_n)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)=\lim m(B_n)\geqslant \overline{\lim}\, m(A_n)$。

(v) 可由(iii)及(vi)导出。 **証毕**

[問題] 在(ii)，(iv)，(v)中，若把 $m(A_1)<\infty$，或者 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)<\infty$ 条件取去，那么所講的結果一般是不成立的，試举例說明。

19.10 在(i)，(iii)两边或者一边的值，縱使为∞也无妨。

測度空間的例子，除§18所述的 Lebesgue 測度（但是关于 $m(A)=\infty$ 的集合需要稍为改正）外，还有下面一个很簡单的例：

例 設 X 为任意集合，又設 $\mathfrak{B}=\mathfrak{P}(X)$. 在 X 上取可数个点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，使每一点分别对应于 $p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots (p_i \geqslant 0)$. 假定任意的 $E(\subset X)$，只含 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n} \cdots$ 而不含其他点 a_n，若規定

$$m(E)=p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots,$$

則 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 是测度空間。設 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n<\infty$，則 m 是有界测度，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n=\infty$，那么就是准有界测度。(这就是所謂空間 X 中存在着质量为 $p_1, p_2, \cdots$ 的质点 $a_1, a_2, \cdots$ 的质量分布。)

§20 测度空間的构成 I (Carathéodory 的外测度，Jordan 测度的扩充)

在§19所述的测度空間，其构成方法之一就是用 Carathéodory 的外测度的方法。

20.1* 在集合 X 中，对于所有的 $A \in \mathfrak{P}(X)$，設有一个非負实数 $m^*(A)$ 与之对应 $(0 \leqslant m^*(A) \leqslant +\infty)$，并且滿足：

CI $\quad m^*(\emptyset)=0$,

CII $\quad A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leqslant m^*(B)$,

CIII $\quad m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

則称 m^* 为 **Carathéodory 的外测度**

20.2 設在 $\mathfrak{P}(X)$ 上定义了 Carathéodory 的外测度 m^*. 設有某集合 $E \in \mathfrak{P}(X)$，如果对于所有的 $A \in \mathfrak{P}(X)$ 皆有下面的不等式成立：

$$M^* \qquad m^*(A) \geqslant m^*(A \cap E)+m^*(A \cap E^c),$$

那末称 E 为 m^* 可测。以 $\mathfrak{B}^*$ 表示凡是 m^* 可测集合的全体，則 $\mathfrak{B}^*$ 是一 Borel 集合体，m^* 为 $\mathfrak{B}^*$ 上的测度。

証明 (a) $\emptyset \in \mathfrak{B}^*$ 是不言而喻的。一般来講，若 $m^*(E)=0$，則 $E \in \mathfrak{B}^*$.

(b) 若 $E\in\mathfrak{B}^*$, 則 $E^c\in\mathfrak{B}^*$, 这是很显然的。

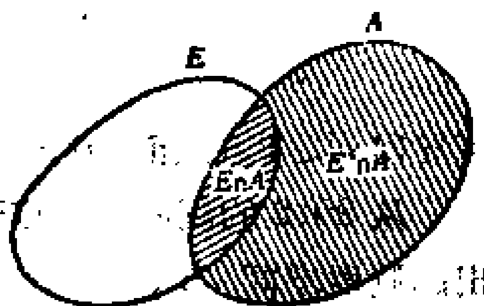


图 20.1

(c) 茲証明: 若 $E_1, E_2, \cdots\in\mathfrak{B}^*$ 及 $E_i\cap E_j=\emptyset\ (i\neq j)$, 那末 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathfrak{B}^*$, $m^*(E)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(E_n)$,

为此, 只要証明对于任意的 $A\in\mathfrak{P}(X)$ 及任意的 n, 成立不等式:

$$(*)\qquad m^*(A)\geqslant\sum_{j=1}^{n}m^*(A\cap E_j)+m^*(A\cap E^c)$$

就可以了。事实上, 当 $n\to\infty$ 时, 我們从不等式(*)就有 $E\in\mathfrak{B}^*$ 及 $m^*(E)=\sum m^*(E_n)$ (只要置 $A=E$)。

至于(*) 可用归納法来証明。当 $n=1$ 时, 因 $E_1\in\mathfrak{B}^*$, 不等式(*)显然成立。現設对 n, (*) 成立, 那么因 $E_{n+1}\in\mathfrak{B}^*$ 及

$$\begin{aligned}m^*(A)&\geqslant m^*(A\cap E_{n+1})+m^*(A\cap E_{n+1}^c)\\&\geqslant m^*(A\cap E_{n+1})+\Big\{\sum_{j=1}^{n}m^*(A\cap E_{n+1}^c\cap E_j)\\&\qquad+m^*(A\cap E_{n+1}^c\cap E^c)\Big\}\\&=\sum_{j=1}^{n+1}m^*(A\cap E_j)+m^*(A\cap E^c).\end{aligned}$$

可知对 $n+1$, (*)也成立。即不等式(*)对于任意 n 都成立。

(d) 設 $E_1, E_2\in\mathfrak{B}^*$, 則从

$$\begin{aligned}m^*(A)&\geqslant m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^c)\\&\geqslant\{m^*(A\cap E_1\cap E_2)+m^*(A\cap E_1\cap E_2^c)\}+m^*(A\cap E_1^c)\\&\geqslant m^*(A\cap E_1\cap E_2)+m^*(A\cap(E_1\cap E_2)^c)\end{aligned}$$

可导出 $E_1\cap E_2\in\mathfrak{B}^*$ [此处用到

$$A\cap(E_1\cap E_2)^c=(A\cap E_1\cap E_2^c)\cup(A\cap E_1^c)].$$

从上面 (a)~(d), 并参照 § 19, 可見 $\mathfrak{B}^*$ 为 Borel 集合体, 从(c)可知 m^* 为 $\mathfrak{B}^*$ 的测度。 証毕

20.3* 在測度空間 $(X, \mathfrak{B}, m)$，如对任一个 $E(\subset X)$，若

$$E\subset E_0,\quad E_0\in\mathfrak{B},\quad m(E_0)=0$$

可导出 $E\in\mathfrak{B}$，(从而 $m(E)=0$)，則称 $(X,\mathfrak{B},m)$ 为**完备測度空間**。

从 20.2 的証明，可以理解 Carathéodory 的外測度 m^* 所导出的測度空間 $(X, \mathfrak{B}^*, m^*)$ 是完备的。下面，我們应用 Carathéodory 的外測度来扩充 Jordan 測度。

20.4* 首先，以 $\mathfrak{K}$ 表示在 X 上的一个集合体。所謂在 $\mathfrak{K}$ 上定义了 **Jordan 式測度**，意指：对于每一个 $A\in\mathfrak{K}$，就有一个非負实数 $v(A)$ $(0\leqslant v(A)\leqslant\infty)$ 与之对应，并滿足以下条件：

JI 若 $A, B\in\mathfrak{K}$，$A\cap B=\emptyset$，則 $v(A\cup B)=v(A)+v(B)$；

JII $v(X)<\infty$，或者 X 可表示为 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，这里 $E_n\in\mathfrak{K}$，$v(E_n)<\infty$ $(n=1, 2, \cdots)$❶。

譬如：

20.5 在 19.5 的情形下，$X=R$，$\mathfrak{K}^1=K(\mathfrak{F}^1)$，我們置 $v([a, b))=b-a$，一般若 $E=\bigcup_{i=1}^{r}[a_i, b_i)$，$[a_i, b_i)\cap[a_j, b_j)=\emptyset$，則置

$$v(E)=\sum_{i=1}^{r}(b_i-a_i),$$

那末，v 是 $\mathfrak{K}^1$ 上的 Jordan 測度。

20.6 在 19.6 的情形下，$X=R^n$，$\mathfrak{K}^n=K(\mathfrak{F}^n)$，我們置

$$v([a_1, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_n))=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i),$$

又对于一般的集合 E，如果 $E=\bigcup_{i=1}^{r}[a_1^{(i)}, \cdots, a_n^{(i)}; b_1^{(i)}, \cdots, b_n^{(i)})$ (右边每項不相交)，此时置

$$v(E)=\sum_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n}(b_j^{(i)}-a_j^{(i)})$$

---

❶ 这里的定义跟 §18 的定义稍有不同。

(这 E 的测度値的表示法是唯一的)，則 v 是 R^n 上的 Jordan 测度❶。

更一般的情形有：

20.7* 設在 X 上的集合体 $\mathfrak{K}$ 上的 Jordan 式测度为 v，如果在 Borel 集合体 $\mathfrak{B}=B(\mathfrak{K})$ 上存在着测度 m，而当 $E\in\mathfrak{K}$ 时有 $m(E)=v(E)$，則称 m 为 v 的扩充。

20.8 扩充定理 集合体 $\mathfrak{K}$ 上的 Jordan 式测度 v，能扩充到 $\mathfrak{B}=B(\mathfrak{K})$ 上的测度 m 的充要条件是 v 有下面的完全加法性：

v 的完全加法性 若 $A, A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{K}$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, $A_i\cap A_j=\emptyset\,(i\neq j)$，則 $v(A)=\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n)$。

証明 必要性的証明是显然的。

充分性：(a) 对于任意的 $E\subset X$，置

$$m^*(E)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n);\ E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ A_n\in\mathfrak{K}(n=1,2,\cdots)\},$$

那么 m^* 是 X 上的 Carathéodory 外测度。

实际上，CI，CII 沒有証明的必要，只要討論 CIII 就可以了。茲設 $E_1, E_2, \cdots$ 为 X 上的子集合，而且 $\sum m^*(E_n)<\infty$。按照上面的 $m^*(E)$ 的假設我們可选取这样的 $A_{n,k}$ 使得 $m^*(E_n)+\varepsilon/2^{n+1}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}v(A_{n,k})$，$A_{n,k}\in\mathfrak{K}$，$E_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n,k}$，則从 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n,k}$，可得 $m^*(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}v(A_{n,k})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(E_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^{n+1}=\sum m^*(E_n)+\varepsilon$。当 $\varepsilon\to 0$ 时，CIII 就成立了。

(b) 若置 $\mathfrak{B}^*$ 为 m^* 可测集合的全体，那末 $\mathfrak{K}\subset B^*$。因为，設 $A\in\mathfrak{K}$, $E\in\mathfrak{P}(X)$，而 $m^*(A)<\infty$。对于任意 $\varepsilon>0$，若取滿足

❶ 当 $E\in K(\mathfrak{J}^n)$ 时，E 不一定可表成 $\bigcup_{i=1}^{r}[a_1^{(i)},\cdots,a_n^{(i)};b_1^{(i)},\cdots,b_n^{(i)})$，此时 $v(E)$ 也可类似地定义。——校者注

$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n)\leqslant m^*(E)+\varepsilon$ 的 $A_n\in\mathfrak{R}$。则从 $E\cap A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A)$，$E\cap A^c\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A^c)$ 得

$$m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n\cap A)+\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n\cap A^c)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n)\leqslant m^*(E)+\varepsilon.$$

由于 ε 为任意的，故当 $\varepsilon\to 0$ 时知 A 为m^* 可测。

(c) 現在証明 $m^*|\mathfrak{R}=v$。对于任意的 $A\in\mathfrak{R}$，有 $m^*(A)\leqslant v(A)$，这是不言而喻的，設 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_n\in\mathfrak{R}$，依照 v 的完全加法性有：$v(A)=\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n\cap A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}v(A_n)$，因此，$v(A)\leqslant\inf\{\sum v(A_n)\}=m^*(A)$。 証毕

附注 $\mathfrak{B}=B(\mathfrak{R})$ 上 v 的扩充 m 是唯一的。此处設 $\mathfrak{B}^*$ 为关于 Carathéodory 外測度 m^* 可測的全体，那么有：

C 对于任意的 $E^*\in\mathfrak{B}^*$，存在着 E_1，$E_2\in\mathfrak{B}$，而且

$$E_1\subset E^*\subset E_2,\quad m^*(E_2-E_1)=0.$$

証明 不妨設 $v(X)<\infty$，对于任意的 $E^*\in\mathfrak{B}^*$，取滿足 $E^*\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k^{(n)}$，而且 $m^*(E^*)+1/n\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}v(A_k^{(n)})$的 $A_k^{(n)}\in\mathfrak{R}$。由此作 $E_2=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k^{(n)}\in B(\mathfrak{R})$，则 $E^*\subset E_2$，而且有等式 $m^*(E^*)=m^*(E_2)$成立。同样对于 $E^{**}=X-E^*$，可以取 $F_1\in B(\mathfrak{R})$，以致 $F_1\supset E^{**}$，$m^*(F_1)=m^*(E^{**})$。若置 $E_1=F_1^c$，那么 $E_1\in B(\mathfrak{R})$，$E_1\subset E^*$ 而且 $m^*(E_1)=m^*(E^*)$。这两个 E_1，E_2 就是所求的了。至于 v 为准有界时的証明相同。 証毕

[問題] v 为 $\mathfrak{R}$ 上完全加法性的充要条件是：設 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{R}$❶，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$，而且 $v(A_1)<\infty$，那么 $\lim v(A_n)=0$。

当測度空間 $(X,\mathfrak{B},m)$ 不是完备的时候，一定存在着唯一滿

❶ 此处原书有誤，应改为 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$，$(A_n\in\mathfrak{R})$。——校者注

足条件 C 的完备測度空間 $(X, \mathfrak{B}^*, m^*)$（这里 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}^*$, $m^*|\mathfrak{B}=m$）。这时称 $(X, \mathfrak{B}^*, m^*)$ 为 $(X,\mathfrak{B},m)$ 的**完备化空間**，特别，用

$$\mathfrak{B}^*=\overline{\mathfrak{B}},\ m^*=\overline{m}$$

来表示，即 $(X, \mathfrak{B}^*, m^*)$ 写成 $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{m})$。

完备化的存在証明：設 $\mathfrak{B}^*$ 表示满足条件 C 的集合 E^* 的全体（这里与 $\mathfrak{B}^*$ 对应的集合族为 $\mathfrak{B}$），則令 $m^*(E^*)=m(E_1)=m(E_2)$ 就可以了。

§ 21 Euclid 空間上的測度

应用 20.8 的扩充定理，在 Euclid 空間能够构成特殊的 Lebesgue 測度。我們在 § 20 已經討論过，当 $X=R$ 时，在 $\mathfrak{K}^1=K(\mathfrak{F}^1)$ 上的 Jordan 測度 v_1，以及当 $X=R^n$ 时，在 $\mathfrak{K}^n=K(\mathfrak{F}^n)$ 上的 Jordan 測度 v_n。如果我們証明了它具有完全加法性，則根据20.8，測度 m 在实际上也被构成了。

21.1 R^n 的集合体 $\mathfrak{K}^n=K(\mathfrak{F}^n)$ 上的測度 v_n，在 $\mathfrak{K}^n$ 上具有完全可加性。

証明 为了簡化起見，只討論 $n=2$ 的情形。

(a) 設有界区間 $I=[a_1,a_2;b_1,b_2)$，$I_r=[a_1^{(r)},a_2^{(r)};b_1^{(r)},b_2^{(r)})$，$I=\bigcup_{r=1}^{\infty}I_r$，$I_i\cap I_j=\emptyset(i\neq j)$，則有 $v(I)=\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)$。这是由于：对于任意的 $\varepsilon>0$，若置 $I^\varepsilon=[a_1, a_2;\ b_1-\varepsilon, b_2-\varepsilon)$，$I_r^\varepsilon=[a_1^{(r)}-\varepsilon/2^{r+2}, a_2^{(r)}-\varepsilon/2^{r+2}, b_1^{(r)}, b_2^{(r)})$，則有 $v(I^\varepsilon)\geqslant v(I)-4\varepsilon l\,(l=\delta(I))$，$v(I_r^\varepsilon)\leqslant v(I_r)+\varepsilon l/2^r$。另一方面，$\overline{I^\varepsilon}$ 是有界閉集合，从而是紧的，因 $(I_r^\varepsilon)^0$ 是开集而且 $\overline{I^\varepsilon}\subset I=\bigcup_{r=1}^{\infty}I_r\subset\bigcup_{r=1}^{\infty}(I_r^\varepsilon)^0$，从紧性定义知存在一个 $N<+\infty$，使得 $I^\varepsilon\subset\bigcup_{r=1}^{N}I_r^\varepsilon$。因此有下面的不等式成立：$v(I)-4\varepsilon l\leqslant v(I^\varepsilon)\leqslant\sum_{r=1}^{N}v(I_r^\varepsilon)\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)+\varepsilon l\sum_{r=1}^{\infty}2^{-r}$。当 $\varepsilon\to 0$

时，就有 $v(I)\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)$。至于反向的不等式 $v(I)\geqslant\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)$，那是很显然的。这就証明了 $v(I)=\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)$。

(b) 若 $A, A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{K}^n, A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j), A=\bigcup_{r=1}^{\infty}A_r(v(A)<+\infty)$，那么只要把 A 与 A_r 分解成为区間的和，然后利用(a)的方法就可証明 $v(A)=\sum_{r=1}^{\infty}v(A_r)$。

(c) 当 $v(A)=+\infty$ 时的証明也是相同的。 証毕

由此可見，依靠 20.8 的扩充定理，可以把 v_n 一意地扩充到 n 維 Borel 集合体 $\mathfrak{B}^n=B(\mathfrak{K}^n)$ 上的测度。从 v_n 所构成的 Carathéodory 外测度記为 m^*，以 $\mathfrak{B}^*$ 表示凡是 m^* 可测集的全体，那么在 20.8 的附注意义下有：

$$\mathfrak{B}^*=\overline{\mathfrak{B}}^n.$$

21.2* 在 Euclid 空間中，称 v_n 在 $\overline{\mathfrak{B}}^n$ 上扩充的唯一确定的测度为 **n 維 Lebesgue 测度**，今后用 m_n 表之。此外称 $E\in\overline{\mathfrak{B}}^n$ 为 **Lebesgue 可测集**。

所有的 (n 維) Borel 集合，特别是所有的开集合、G_δ 集合、F_σ 集合(关于 m_n)都是可测集。一般来讲，凡 m_n 可测集合 E 一定存在着满足 $E_1\subset E\subset E_2$, $m(E_2-E_1)=0$ 的集合 $E_1, E_2\in\mathfrak{B}^n$。

实际上，为了定义 $m_n(E)$ 的值，也要考虑如下的过程。(i) 因为开集合 O 能够表示为：$O=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, $I_k\in\mathfrak{K}_n$, $I_k\cap I_j=\emptyset$ $(i\neq j)$，所以定义

$$m_n(O)=\sum_{k=1}^{\infty}v_n(I_k).$$

这个值不依赖于 O 的分割方法。(ii) 对于有界閉集合 F，取充分大 N，使得 $F\subset I^{(N)}$，而 $I^{(N)}=(-N, \cdots, -N; N, \cdots, N)$。因

为 $I^{(N)}-F$ 是开集合，故定义 $m_n(F)=m_n(I^{(N)})-m_n(I^{(N)}-F)$。对于一般的閉集合 F，定义 $m_n(F)=\lim_{N\to\infty} m_n(I^{(N)}\cap F)$。(iii) 对于 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$，$O_1\supset O_2\supset\cdots$，$O_k$ 是开集合（即 E 是 G_δ 集合），定义 $m_n(E)=\lim_{N\to\infty} m_n(E\cap I^{(N)})$，$m_n(E\cap I^{(N)})=\lim_{k\to\infty} m_n(O_k\cap I^{(N)})$。此外，对于 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$，$F_1\subset F_2\subset\cdots$，$F_k$ 为閉集合（即 E 为 F_σ 集合），定义 $m_n(E)=\lim_{k\to\infty} m_n(F_k)$。更一般的是：

21.3 对于 R^n 的任意集合 E，置

$$m_e(E)=\inf\{m_n(O);\ E\subset O\ (\text{开集合})\},$$

$$m_i(F)=\sup\{m_n(F);\ E\supset F\ (\text{閉集合})\},$$

称 $m_e(E)$ 为 E 的 **Lebesgue 外測度**，$m_i(E)$ 为 E 的 **Lebesgue 内測度**。因此存在两个集 E_1（G_δ 集合），E_2（F_σ 集合），使得

$$E_1\supset E,\ m_n(E_1)=m_e(E),\ E_1 \text{ 为 } G_\delta \text{ 集合},$$

$$E\supset E_2,\ m_n(E_2)=m_i(E),\ E_2 \text{ 为 } F_\sigma \text{ 集合}。$$

特别，E 为 Lebesgue 可測而且 $m_n(E)<\infty$ 的充要条件是 $m_e(E)=m_i(E)<\infty$。

証明 玆考虑 E 为有界而含于 $I^{(N)}$ 的情形。从 m_n 是 v_n 的扩充的定义，对于一般集合 $E\subset R^n$，有 $m^*(E)=\inf\{\sum v_n(I_k);\ E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k\in\mathfrak{R}_n\}$。取具有 $I_k\subset I_k^*$（开区間），$v_n(I_k)+\varepsilon/2^k\geqslant m_n(I_k^*)$ 这样性質的 I_k^*，置 $O=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^*$（开集合），那末 $E\subset O$，$m_n(O)\leqslant\sum v(I_k)+\varepsilon$。从而有 $m^*(E)=m_e(E)$。在 $m^*(I^{(N+1)}-E)=m_e(I^{(N+1)}-E)=\inf\{m_n(O);\ I^{(N+1)}-E\subset O$: 开集合$\}$ 等式中，如果置 $F=I^{(N+1)}-O\cap I^{(N+1)}$，那么 F 是閉集而 $F\subset E$，从而得到 $m_i(E)=m_n(I^{(N+1)})-m^*(I^{(N+1)}-E)$。其次若 E 为 Lebesgue 可測，则 $m_n(E)=m^*(E)=m_e(E)$，$m_n(E)=m_n(I^{(N+1)})-m_n(I^{(N+1)}-E)=m_i(E)$。反之，若 $m_e(E)=m_i(E)$，则成立等式：$m_n(I^{(N+1)})$

$=m^*(E)+m^*(I^{(N+1)}-E)$。由此容易导出 E 是 m^* 可测（即 Lebesgue 可测）。（E 为无界的情形留給讀者来証明。）　　証毕

例　在 R 中，Cantor 集合 C 是閉集合，它的測度为 $m_1(C)=1-(1/3)-2(1/9)-\cdots-2^{n-1}(1/3)^n-\cdots=0$。除此之外，有理数全体 Q 是 F_σ 集合，而且 $m_1(Q)=0$。

再者，在 §18 中已經把 Jordan 测度和 Lebesgue 测度作过比較，从 Lebesgue 测度的观点来看，可知 Jordan 测度有如下的性质，即对于任意有界集合 $E(\subset R^n)$，它的 Jordan 外测度为

$$\bar{v}(E)=m_n(\bar{E}),$$

它的 Jordan 内测度为

$$\underline{v}(E)=m_n(E^\circ).$$

从而，E 为 Jordan 可测的充要条件是：

$$m_n(\bar{E})=m_n(E^\circ)\ \text{即}\ m_n(E^r)=0.$$

回顾一下上述的 Lebesgue 测度的构成法就立即可以理解下面的扩充是可能的。茲举 $n=1, 2$ 的情形作說明。

21.4*　在 R 上定义了一个非負的实函数 $0\leqslant F(x)<+\infty$，并满足下面的条件：

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=M<\infty$;

(ii) 对于 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}F(x-\varepsilon)=F(x)$;

(iii) 設 $x>y$，有 $F(x)\geqslant F(y)$。

这时若置 $v_1([a, b))=F(b)-F(a)$，則 v_1 是在 $\mathfrak{R}_1$ 上的 Jordan 测度，而且在 $\mathfrak{R}_1$ 上是完全加性的。由此一意地扩充到 Borel 集合体 $\mathfrak{B}^1$ 上的有界测度 m 我們称它做（由 F 来确定的）**1維 Lebesgue-Stieltjes 测度**。

例如，若 $F(x)=0\ (-\infty<x\leqslant0)$，$F(x)=1\ (0<x<\infty)$ 而得到的测度就有 $m(E)=1\ (0\in E)$，$m(E)=0\ (0\overline{\in}E)$。

21.5*　設在 R^2 上定义的非負实函数 $F(x, y)$，$(0\leqslant F(x, y)$

$<+\infty$), 滿足下面条件:

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y)=0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} F(x, y)=M \leqslant\infty$;

(ii) 对于 $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ 有 $\lim\limits_{\varepsilon_1\to0, \varepsilon_2\to0} F(x-\varepsilon_1, y-\varepsilon_2)=F(x, y)$;

(iii) 若 $\Delta=[x_1, x_2; y_1, y_2)$ 則有

$$F(\Delta)=F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)-F(x_2, y_1)+F(x_1, y_1)\geqslant0.$$

如命 $v_2(\Delta)=F(\Delta)$, 則 v_2 是 $\mathfrak{R}_2$ 上的 Jordan 測度, 而且(由(ii))在 R_2 上是完全加法的, 由此一意地扩充到 Borel 集合体 $\mathfrak{B}^2$ 上的有界測度 m, 称这个 m 为(由 F 来确定的) **2.維 Lebesgue-Stieltjes** 測度, 对于 m 来説, 和 21.3 同样的結果也成立。

注意　反之, 对于定义在 Borel 集合体 $\mathfrak{B}^2$ 上的任意的(准)有界測度 m,

$$F(x, y)=m((-\infty, -\infty; x, y)),$$

則 $F(x, y)$ 是滿足 21.4* 的 (i), (ii), (iii) 的。从而 $\mathfrak{B}^2$ 的所有的測度, 必然可以用 Lebesgue-Stieltjes 測度来表示。从此, 固有的 Lebesgue 測度以下面性质作为它的特征:

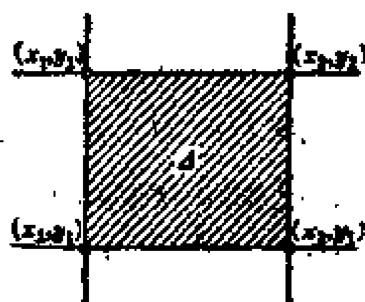


图　21.1

H　設 $E_1, E_2\in\mathfrak{B}^2$, 若經过运动能重合, 則有 $m(E_1)=m(E_2)$.

以上对于 n 維的情形也同样成立。

§22　測度空間的构成 II (直积測度)

有几种方法可以从已給的測度空間导出其他的測度空間。

(I) 設 $Y\subset X$, 而且 $Y\in\mathfrak{B}$, 則命

$$\mathfrak{B}_Y=\{E; E\in\mathfrak{B}\ \&\ E\subset Y\},\quad m_Y(E)=m(E),$$

就得測度空間 $(Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$. 此外, 若 $Y\overline{\in}\mathfrak{B}$, 因存在着 $Y^*\in\mathfrak{B}$, $Y\subset Y^*$, 使得对于任意 $Y\subset E$, $E\in\mathfrak{B}$, 有 $m(Y^*)\leqslant m(E)$. (譬如, m 为 Lebesgue 測度, 依 21.3, 取 Y^* 为 G_δ 集合。) 这时置

$$\mathfrak{B}_Y=\{E\cap Y; E\in\mathfrak{B}\},\quad m_Y(E\cap Y)=m(E\cap Y^*),$$

于是就构成测度空間 $(Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$.

［問題］証明上面的命題。

（II） 如測度空間$(Y, \mathfrak{B}, m)$与映象$f: X \to Y$为已知，則依(I)可在$f(X)(\subset Y)$上构成测度空間，若$f(X)=Y$，置

$$\mathfrak{B}_X = f^{-1}(\mathfrak{B}),\ m_X(f^{-1}(E)) = m(E) \qquad (E \in \mathfrak{B}),$$

則得到新的測度空間 $(X, \mathfrak{B}_X, m_X)$.

(III) 如测度空間 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 及完全映射$f: X \to Y$为已知，若取

$$\mathfrak{B}_Y = \{E; E \subset Y,\ f^{-1}(E) \in \mathfrak{B}\},\ m_Y(E) = m(f^{-1}(E))\ (E \in \mathfrak{B}_Y),$$

則就构成測度空間 $(Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$.

［問題］証明命題 (II) 与 (III)

(IV) 重要的是直积集合的情形。

設 $\mathfrak{R}_X$, $\mathfrak{R}_Y$ 分别为 X, Y 上的集合体，v_X, v_Y 分别为 $\mathfrak{R}_X$, $\mathfrak{R}_Y$ 上的已知 Jordan 測度。在直积集合 $Z = X \times Y$ 上，作以集合 $\{A \times B; A \in \mathfrak{R}_X, B \in \mathfrak{R}_Y\}$ 的有限和为元素的集合体 $\mathfrak{R}_Z$。这时也記

$$\mathfrak{R}_Z = \mathfrak{R}_X \times \mathfrak{R}_Y.$$

此外，定义 $\mathfrak{R}_Z$ 上的 Jordan 測度 v_Z 为 $v_Z(A \times B) = v_X(A) \cdot v_Y(B)$. 此时，也記

$$v_Z = v_X \times v_Y.$$

22.1 設 v_X, v_Y 在 $\mathfrak{R}_X$, $\mathfrak{B}_Y$ 上是完全加法的，那末 v_Z 在 $\mathfrak{R}_Z$ 上也是完全加法的。

証明 依 20.8 的問題，只要証明当 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, $E_n \in \mathfrak{R}_Z$, $v_Z(E_1) < +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_Z(E_n) = w > 0$ 时有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \neq \emptyset$ 就成了。作 $E_n = \bigcup\limits_{k=1}^{r_n} A_k^{(n)} \times B_k^{(n)}$, $A_k^{(n)} \in \mathfrak{R}_X$, $B_k^{(n)} \in \mathfrak{R}_Y$, $A_k^{(n)} \cap A_j^{(n)} = \emptyset\ (k \neq j)$, 但 $0 < v_X(A_k^{(n)}) < +\infty$, 此时不妨設 $A_k^{(n)}$ 含于 $A_j^{(n-1)}$, 这在証明中，并不失去一般性。于此，取某一个 $c > 0$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{r_1} v_X(A_k^{(1)}) < c$,

$v_Y(B_k^{(1)})<c(k=1,2,\cdots)$. 設 $\sum'$ 为具有 $v_Y(B_k^{(n)})>w/2c$ 那样的 k 的和，置 $A_n=\sum' A_k^{(n)}$. 由于 $A_1\supset A_2\supset\cdots$, $w\leqslant v_Z(E_n)\leqslant v_X(A_n)c+c(w/2c)$，就有 $v_X(A_n)>w/2c\,(n=1,2,\cdots)$. 从 v_X 在 $\mathfrak{R}_X$ 上的完全可加性，可知存在一个 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. 另一方面，取 $x_0\in A_{i_n}^{(n)}$，就有 $B_{i_1}^{(1)}\supset B_{i_2}^{(2)}\supset\cdots$, $v_Y(B_{i_n}^{(n)})\geqslant w/2c>0$. 从 v_Y 在 $\mathfrak{R}_Y$ 上的完全可加性，可知存在一个 $y_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{i_n}^{(n)}$. 由是証明了 $(x_0,y_0)\in E_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 証毕

从上面知道，当两个測度空間 $(X,\mathfrak{B}_X,m_X)$, $(Y,\mathfrak{B}_Y,m_Y)$ 为已給的时候，設 $Z=X\times Y$, $\mathfrak{B}_Z=B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)$，那么 $\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y$ 上的 $m_Z=m_X\times m_Y$ 可扩充到 $\mathfrak{B}_Z$ 上的測度。它也可以同样写为

$$m_Z=m_X\times m_Y,$$

称它为 m_X 与 m_Y 的直积測度，而称

$$(X\times Y,\ B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y),\ m_X\times m_Y)$$

为直积測度空間。

其次，在測度空間 $(X\times Y,\ \mathfrak{B}_Z,\ m_Z)$ 上，当 $\mathfrak{B}_Z$ 为 $B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)$ 的完备化，而在 $B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)$ 上有 $m_Z=m_X\times m_Y$ 的时候，称 $(X\times Y,\ \mathfrak{B}_Z,\ m_Z)$ 为完备直积測度空間。

[問題] m 維及 n 維的 Lebesgue 測度的 (完备) 直积測度，是 $(m+n)$ 維的 Lebesgue 測度。

§25 要講的 Fubini 定理对于直积測度是非常重要的，作为它的准备，茲举两个結果于下。

22.2° 所謂在 X 上的集合族 $\mathfrak{N}(\subset\mathfrak{P}(X))$ 是正規集合族，意指 $\mathfrak{N}$ 滿足下列条件：(i) 若 $E_1,\cdots,E_n\in\mathfrak{N}$, $E_i\cap E_j=\emptyset\,(i\neq j)$，那么 $\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathfrak{N}$，(ii) 若 $E_1,E_2,\cdots\in\mathfrak{N}$, $E_1\subset E_2\subset\cdots$，那末 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathfrak{N}$，(iii) 若 $E_1,E_2,\cdots\in\mathfrak{N}$, $E_1\supset E_2\supset\cdots$，那末 $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathfrak{N}$. 对于任意一个已知集合族 $\mathfrak{F}(\subset\mathfrak{P}(X))$，存在着一个含 $\mathfrak{F}$ 的最小的正規集合族。記它为 $N(\mathfrak{F})$.

22.3 設 $\mathfrak{K}(\subset\mathfrak{P}(X))$ 为集合体，則有 $N(\mathfrak{K})=B(\mathfrak{K})$.

証明 Borel 集合体具有正規集合族的性質 (i), (ii), (iii), 故一般来講有 $N(\mathfrak{K})\subset B(\mathfrak{K})$. 因此只要証明 $N(\mathfrak{K})$ 是 Borel 集合体就够了。依 §19.3 的問題，我們知道只要証明："若 E_1, $E_2\in N(\mathfrak{K})$，則 $E_1\cap E_2\in N(\mathfrak{K})$"及"若 $E_1\in N(\mathfrak{K})$，則 $E_1^c\in N(\mathfrak{K})$"就成了。首先，对于所有的 $E\in\mathfrak{K}$，記凡有 $A\cap E\in N(\mathfrak{K})$ 那样的 $A(\in\mathfrak{P}(X))$ 的全体为 $\mathfrak{N}_1$. 显然 $\mathfrak{N}_1$ 为含 $\mathfrak{K}$ 的正規集合族，由此 $N(\mathfrak{K})\subset\mathfrak{N}_1$. 其次，对于所有的 $E\in N(\mathfrak{K})$，有 $A\cap E\in N(\mathfrak{K})$ 那样性質的 $A(\in\mathfrak{P}(X))$ 的全体記为 $\mathfrak{N}_2$，显然 $\mathfrak{N}_2$ 为含 $\mathfrak{K}$ 的正規集合族，由此 $N(\mathfrak{K})\subset\mathfrak{N}_2$. 这样就可証明需要証明的前半部。后半部同样証明，E 及 E^c 都属于 $N(\mathfrak{K})$ 那样的 E 的全体，可見是含 $\mathfrak{K}$ 的正規集合族。

証毕

22.4 在測度空間 $(X, \mathfrak{B}_X, m_X)$, $(Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$, 設 $Z=X\times Y$, $\mathfrak{B}_Z=B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)$, $m_Z=m_X\times m_Y$. 对于任意的 $E\in\mathfrak{B}_Z$，关于 $y=y_0(\in Y)$ 的截口集合 $E_X(y_0)=\{x;\ x\in X, (x, y_0)\in E\}$ 及关于任意 $x=x_0(\in X)$ 的截口集合 $E_Y(x_0)$，它們分別属于 $\mathfrak{B}_X$, $\mathfrak{B}_Y$.

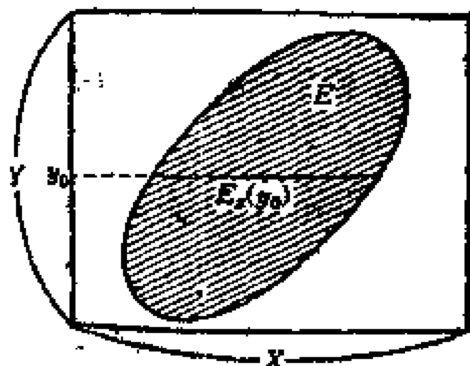


图 22.1

証明 (i) 对于 $E\in\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y$，上面的性質成立是显然的。

(ii) 以 $\mathfrak{R}$ 表示成立上面性質的 $E(\subset Z)$ 的全体，則可直接推出 $\mathfrak{R}$ 是正規集合族，由此从 22.3 可知 $B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)\subset\mathfrak{R}$.

証毕

注意 特別是当 $(X,\mathfrak{B}_X,m_X)$, $(Y,\mathfrak{B}_Y,m_Y)$ 为完备測度空間而 $(Z, \mathfrak{B}_Z, m_Z)$ 为完备直积測度空間。对于 $E\in\mathfrak{B}_Z$，可以証明必可取具有 $A_0\in\mathfrak{B}_X$, $m_X(A_0)=0$ 及 $B_0\in\mathfrak{B}_Y$, $m_Y(B_0)=0$ 性質的 A_0 及 B_0，使 $y_0\,\overline{\in}\,B_0$ 时有 $E_X(y_0)\in\mathfrak{B}_X$; 而 $x_0\,\overline{\in}\,A_0$ 时則有 $E_Y(x_0)\in\mathfrak{B}_Y$.

第 5 章　Lebesgue 积分

§23　Riemann 积分与 Lebesgue 积分的比較

讓我們先来叙述一下 Lebesgue 积分比 Riemann 积分有哪些优点。为此，从温习一般的 Riemann 积分着手。

設 X 为 R^n 中的单位立方体，即 $X=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n); 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$，$\mathfrak{R}$ 为 X 中所有 Jordan 可測集的全体，v 为在 $\mathfrak{R}$ 上的測度(§18)。因此 $v(X)=1$。茲考慮在 X 上定义的有界实函数 $f(x)$。

所謂 $\Delta=\{E_1, E_2, \cdots, E_r\}$ 是属于 X 上的 $\mathfrak{R}$ 的分割是指 $E_i\in\mathfrak{R}(i=1, \cdots, r)$，而且

$$X=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_r,$$

$$E_i\cap E_j=\emptyset\quad(i\neq j).$$

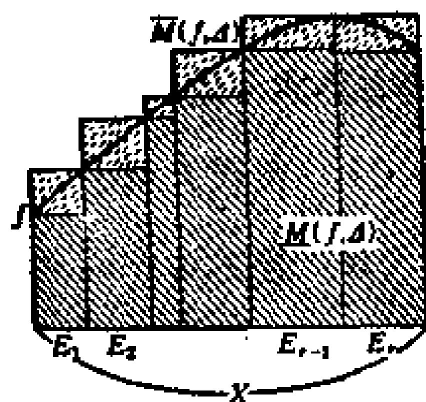


图　23.1

对于这个分割 Δ，置

$$\overline{M}(f, \Delta)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v(E_i),$$

$$\alpha_i=\sup\{f(x); x\in E_i\};$$

$$\underline{M}=(f, \Delta)=\sum_{i=1}^{r}\beta_i v(E_i),$$

$$\beta_i=\inf\{f(x); x\in E_i\}.$$

那么，若 $|f(x)|\leqslant K$，就有 $-K\leqslant\underline{M}(f, \Delta)\leqslant\overline{M}(f, \Delta)\leqslant K$。

設 $\Delta=\{E_i; i=1, \cdots, r\}$，$\Delta'=\{E'_j; j=1, \cdots, s\}$为 $\mathfrak{R}$ 的两个分割，作它們的共同細分 $\Delta''=\Delta\cap\Delta'=\{E_i\cap E'_j;\ i=1, \cdots, r, j=1, \cdots, s\}$。从定义直接可知 $\overline{M}(f, \Delta)\geqslant\overline{M}(f, \Delta'')$，$\overline{M}(f, \Delta')\geqslant\overline{M}(f, \Delta'')$，$\underline{M}(f, \Delta)\leqslant\underline{M}(f, \Delta'')$，$\underline{M}(f, \Delta')\leqslant\underline{M}(f, \Delta'')$。取

所有属于 $\mathfrak{R}$ 的分割 Δ 的 sup, inf, 并置

$$\overline{M}(f)=\inf\{\overline{M}(f,\ \Delta)\},\ \underline{M}(f)=\sup\{\underline{M}(f,\ \Delta)\},$$

显然有 $\overline{M}(f)\geqslant\underline{M}(f)$。这时，我們分别称 $\overline{M}(f)$，$\underline{M}(f)$为 $f(x)$ 的**上积分**与**下积分**。如果 $\overline{M}(f)=\underline{M}(f)$，则称 $f(x)$ 为 **Riemann 可积**，它的值用

$$\int_X f(x)v(dx)\ \text{或}\ \int_X f(x)dv$$

来表示，并称之为 $f(x)$ 在 X 上的 **Riemann 积分**。$f(x)$ 为 Riemann 可积的充要条件是：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在着一个属于 $\mathfrak{R}$ 的分割 $\Delta=\{E_i;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$，使得

$$\text{Osc}\,(f,\ \Delta)=\overline{M}(f,\ \Delta)-\underline{M}(f,\ \Delta)=\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i-\beta_i)v(E_i)<\varepsilon.$$

例如：設 $f(x)$ 为連續函数，则 $f(x)$ 在閉区間 X 上一致連續，只要分割的小区間充分小，那么 Osc $(f,\ \Delta)$ 可以小至任何程度。因此，所有連續函数 $f(x)$ 都为 Riemann 可积。

現在設 $\mathfrak{R}$ 为 Jordan 測度空間 $(X,\ \mathfrak{R},\ v)$ 上所有 Riemann 可积的有界实函数的全体，則 $\mathfrak{R}$ 有如下的性質：

(i) 常数 1 属于 $\mathfrak{R}$，而 $\int_X 1\,(x)dv=1$;

(ii) 若 $f,\ g\in\mathfrak{R}$，$\alpha,\ \beta$ 为实数，则 $\alpha f+\beta g\in\mathfrak{R}$ 而且

$$\int_X(\alpha f+\beta g)dv=\alpha\int_X f\,dv+\beta\int_X g\,dv;$$

(iii) 設 $f\in\mathfrak{R}$，而且在 X 上 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_X f\,dv\geqslant 0;$$

(iv) 設 $f_1,\ f_2,\ \cdots\in\mathfrak{R}$，而且在 X 上 $\lim f_n(x)=f_0(x)$ 一致成立，则 $f_0\in\mathfrak{R}$，并有

$$\int_X f_0dv=\lim_{k\to\infty}\int_X f_kdv.$$

現在来討論一下用 Lebesgue 測度代替 Jordan 可測集合作成

的集合体 $\mathfrak{K}$ 上的 v 以后发生的变化。至于 Lebesgue 积分的定义将在后面叙述。設 $\mathfrak{L}$ 为 X 上 Lebesgue 可积函数 $f(x)$（不一定有界）的全体，为了区别于其他积分，在积分符号前附以記号 (L)。以后将可知道，它具有下面的性質：

(0) 若 $f\in\mathfrak{R}$，則 $f\in\mathfrak{L}$，而且

$$\int_X f\,dv=(L)\int_X f\,dm.$$

(i)，(ii)，(iii)，(iv)在 $\mathfrak{L}$ 上也成立。

(v) 設 $f,f_1,f_2,\cdots\in\mathfrak{L}$，$f\geqslant 0$，$|f_n(x)|\leqslant f(x)\ (n=1,2,\cdots)$，并設 $\lim f_n(x)=f_0(x)$ 存在（不一定是一致收斂），則 $f_0\in\mathfrak{L}$ 而且

$$(L)\int_X f_0dm=\lim_{k\to\infty}(L)\int_X f_k dm.$$

条件(iv)比条件(v)来得强，以后将可以看到，这点是非常重要的。尽管 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的差别不仅在(v)这一条，但在实际上，应用到的 Lebesgue 积分的性質并不很多，例如掌握好上面的(v)和以后卽将講到的 Fatou 不等式(25.7)及 Fubini 定理(25.10)，則在一般应用上已很足够了。

注意 (v)中 $f_1,f_2,\cdots$ 和 $|f_n(x)|\leqslant f(x)\ (\geqslant 0)$ 的 $f(x)$ 必須属于 $\mathfrak{L}$ 这些条件是很重要的，例如，在 $X=[0,1]$ 时置 $f_n(x)=0\ (0\leqslant x\leqslant 1-1/n)$，$f_n(x)=n\ (1-1/n<x\leqslant 1)$，就有 $(L)\int_X f_n dm=1$，$\lim f_n=0$，这样，(v)的公式就不成立。

但是，給定了一个測度空間 $(X,\mathfrak{B},m)$ 之后，对于定义在 X 上的实函数 $f(x)$ 来說，(i) $f(x)$ 的可积性定义和 (ii) $f(x)$ 的积分定义究竟应如何确定才好呢？可用的方法很多，这些方法虽然形式不同，但在本質上都沒有什么大的区别。茲举下面的三种方法作为例子。为了叙述簡单起見，不妨假定 $m(X)<\infty$，$0\leqslant f(x)\leqslant K$。

(I) 作由实数 R，1 維 Borel 集合体 $\mathfrak{B}^1$，Lebesgue 測度 m_1 所构成的測度空間 $(R,\mathfrak{B}^1,m_1)$ 与 $(X,\mathfrak{B},m)$ 的直积空間 $(X\times R,$

$B(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^1),\mu)$ $(\mu=m\times m_1)$。其次，作 $f(x)$ 的纵线集合

$$J(f)=\{(x,y);x\in X,0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

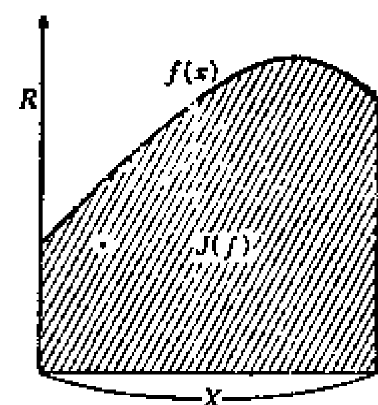


图　23.2

(i) 当 $J(f)\in B(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^1)$ 时，称 $f(x)$ 为可积(或称积分可能)。(ii)这时它的积分定义为

$$\int_X f(x)dm=\mu(J(f)).$$

(II) 如果 $f(x)$ 在 (i) 的意义下可积，依照 22.4[1]，可知截口集合

$$E(f,a)=\{x;\ x\in X,f(x)\geqslant a\}$$

对于所有的 $a\in R$ 都有 $E(f,a)\in\mathfrak{B}$，现在就从这个性质来定义 $f(x)$ 的可测性。所谓定义在 X 上的实函数 $f(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测，意指对于任意的 $a\in R$，都有 $E(f,a)\in\mathfrak{B}$。

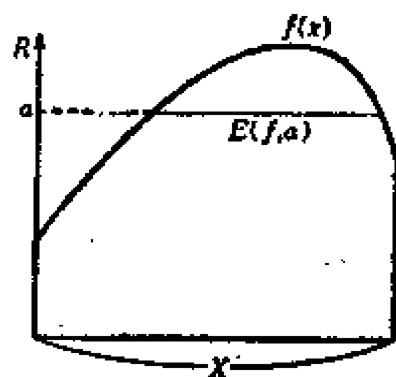


图　23.3

对于任意自然数 n，置

$$f_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}c_{E(f,r/2^n)},$$

则 $f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。从而置

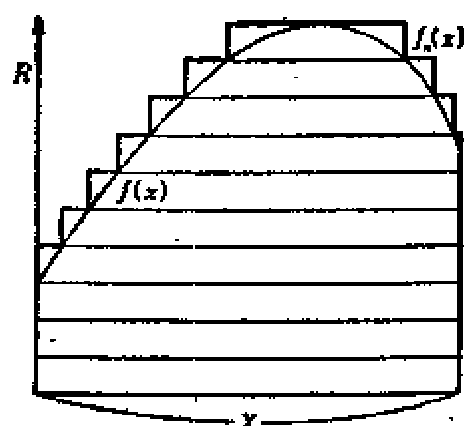


图　23.4

$$J_n(f)=\bigcup_{r=0}^{\infty}E(f,r/2^n)\times(r/2^n,(r+1)/2^n]$$

(即 $f_n(x)$ 的纵线集合)，就有

$$J_1(f)\supset J_2(f)\supset\cdots,$$

$$J(f)=\bigcap_{n=1}^{\infty}J_n(f),$$

故

$$\mu(J(f))=\lim_{n\to\infty}\mu(J_n(f))$$

---

[1] 这里不能立即由22.4推出 $E(f,a)$ 为可测，但可仿照22.4证明。——校者注

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}m(E(f, r/2^n)),$$

也就是說，$f(x)$ 的积分可表达为

$$(*)\qquad \int_X f(x)\,dm=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{\infty}m(E(f, r/2^n)).$$

因此，如果一开始便考慮 f 为 $\mathfrak{B}$ 可測函数的話，那么它的积分就可由(*)来定义。

反过来，如果 $f(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可測，则它在 (I) 的意义下必定可积。这可由 $J_n(f)\in\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^1$，从而有 $J(f)=\bigcap J_n(f)\in B(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^1)$ 的事实得到証明。

注意 (1) 特别是当 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 为完备測度空間时，它和 $(R, \mathfrak{B}^1, m_1)$ 的直积空間也用完备直积測度空間 $(X\times R, \overline{B(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^1)}, \bar{\mu})$ 来代替，(I)，(II) 的結果仍无改变。这是因为，根据 §22 末的附注，对于 $\overline{B(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^1)}$ 可測集合 $J(f)$ 来說，除了某一 m_1 測度为 0 的集合 $\Delta(\subset R)$ 的 a 以外，都有 $E(f, a)\in\mathfrak{B}$。另一方面，当 $a>a'$ 时，有 $E(f, a)\subset E(f, a')$，又当 $a_n<a$, $\lim a_n=a$ 时，有 $E(f, a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f, a_n)$，因此，实际上并无把这样的集合 Δ 除外的必要。

(2) 如果 $|f(x)|\leqslant K$，那么，由于 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，而这里 $f^+(x)=\max(f(x), 0)$，$f^-(x)=\max(-f(x), 0)$，显然，可以归到 $f(x)\geqslant 0$ 的情形。

(III) 第三种方法可說与定义 Riemann 积分的方法完全相同。那就是，对于測度空間 $(X, \mathfrak{B}, m)$，作属于 $\mathfrak{B}$ 的分割 $\Delta=\{E_i; i=1, 2, \cdots, r\}$ $(E_i\in\mathfrak{B}, i=1, \cdots, r)$。对于定义在 X 上的函数 f，和 Riemann 积分一样定义 $\overline{M}(f, \Delta)$，$\underline{M}(f, \Delta)$。考虑所有这样的分割 Δ，从而定义 $\overline{M}(f)$，$\underline{M}(f)$，当 $\overline{M}(f)=\underline{M}(f)$ 时，便称 f 为可积。并且称 $\overline{M}(f)=\underline{M}(f)$ 的值为 f 在 X 上的积分。

凡是 $\mathfrak{B}$ 可測的函数 $f(0\leqslant f(x)\leqslant K)$ 在这样的意义下是可积的。理由是：只須作

$$\Delta_n=\{E(f, 0)-E(f, 1/n), E(f, 1/n)-E(f, 2/n), \cdots,$$
$$E(f, i/n)-E(f, (i+1)/n, \cdots\}$$

(这实际是一个有限分割),则由不等式

$$\overline{M}(f, \Delta_n)-\underline{M}(f, \Delta_n)$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} m(E(f, i/n)-E(f, (i+1)/n)=\frac{1}{n} m(X) \to 0$$

即可得証其可积性。其次,$\overline{M}(f)=\underline{M}(f)=\lim \overline{M}(f, \Delta_n)$ 的值与(*)也完全一致。

反过来,在(III)意义下可积的 f 虽不一定为 $\mathfrak{B}$ 可测,但如 $\overline{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathfrak{B}$ 关于 m 的完备化,则可証明 f 为 $\overline{\mathfrak{B}}$ 可测(証明从略,参看书末文献"河田[4]")。

以上説明了(I),(II)及(III)(当$(X, \mathfrak{B}, m)$为完备时)的等价性,其中最方便的要算是(II)的方法,在下节还要加以説明。

§24 可测函数

24.1* 設在集合 X 上給定了一个 Borel 集合体 $\mathfrak{B}(\subset\mathfrak{P}(X))$。所謂定义在 X 上的实函数 $f(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可測,意指:对于所有实数 $a\in R$,

$$E(f, a)=\{x;\ x\in X,\ f(x)\geqslant a\}$$

都属于 $\mathfrak{B}$。这时,所有下面的集合

$$\{x;\ x\in X,\ f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x;\ x\in X,\ f(x)\geqslant a+1/n\},$$

$$\{x;\ x\in X,\ f(x)\leqslant a\}=X-\{x;\ f(x)>a\},$$

$$\{x;\ x\in X,\ f(x)<a\}=X-\{x,\ f(x)\geqslant a\}$$

也都属于 $\mathfrak{B}$。

24.2 若 $f(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可測函数,则对于任意1維 Borel 集合 A,有

$$\{x;\ x\in X,\ f(x)\in A\}\in\mathfrak{B}.$$

証明 对于 $\mathfrak{B}$ 可測函数 $f(x)$ 而言,具有上面性质的 $A(\in\mathfrak{P}(X))$ 的全体,显然构成一个包含 $\mathfrak{K}^1(=K\mathfrak{F}^1)$ 的 Borel 集合体。因

此，对于 $A\in B(\mathfrak{R}^1)=\mathfrak{B}^1$，当然有 $\{x;\ x\in X,\ f(x)\in A\}\in\mathfrak{B}$。証毕

24.3* 在 n 維 Euclid 空間 R^n 中，关于 n 維 Borel 集合体 $\mathfrak{B}^n$ 为可测的函数 f，称为 **Baire 函数**。

24.4 設 X 上的函数 $g_1(x),\cdots,g_n(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测，而 $f(t_1,\cdots,t_n)$ 为 R^n 上的 Baire 函数，那末 $F(x)=f(g_1(x),\cdots,g_n(x))$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测函数。

証明 对于 $I=(-\infty,\cdots,-\infty;a_1,\cdots,a_n)$，有 $\{x;\ x\in X,\ (g_1(x),\cdots,g_n(x))\in I\}=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\{x;\ g_k(x)<a_k\}\in\mathfrak{B}$。因此，跟 24.2 一样，对于任意的 $A\in\mathfrak{B}^n$，有 $\{x;\ (g_1(x),\cdots,g_n(x))\in A\}\in\mathfrak{B}$。由此可見，如果置 $A=\{(t_1,\cdots,t_n);\ f(t_1,\cdots,t_2)\geqslant a\}$，那么 $\{x;\ F(x)\geqslant a\}=\{x;\ (g_1(x),\cdots,g_n(x))\in A\}\in\mathfrak{B}$。 証毕

24.5 若 $f(x)$，$g(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测，那么 $af(x)+bg(x)$，$f(x)g(x)$，$|f(x)|$，$f^+(x)=\max(f(x),0)$，$f^-(x)=\max(-f(x),0)$，$\max(f(x),g(x))$，$\min(f(x),g(x))$ 都为 $\mathfrak{B}$ 可测。此外，若 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测，則 $\sup\{f_n(x);\ n=1,2,\cdots\}$，$\inf\{f_n(x);\ n=1,2,\cdots\}$，$\overline{\lim}\,f_n(x)$，$\underline{\lim}\,f_n(x)$（若 $\lim f_n(x)$ 存在的話），$\lim f_n(x)$ 都是 $\mathfrak{B}$ 可测。

証明 由于 $f(t_1,t_2)=at_1+bt_2$，$f(t_1,t_2)=t_1t_2$，$f(t)=|t|$，$f(t)=\max(t,0)$，$f(t)=\max(-t,0)$，$f(t_1,t_2)=\max(t_1,t_2)$ 等都是 Baire 函数，故定理的前半部可由上面的 24.4 直接导出。現証定理的后半部：对于 $f(x)=\sup\{f_n(x);n=1,2,\cdots\}$，有 $\{x;f(x)>a\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x;f_n(x)>a\}\in\mathfrak{B}$，但 $E(f,a)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x;\ f(x)>a-1/n\}\in\mathfrak{B}$，故 $f(x)$ 为可测。同样，对于 $f(x)=\inf\{f_n(x);\ n=1,2,\cdots\}$，有 $E(f,a)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n,a)\in\mathfrak{B}$。其次 $\overline{\lim}\,f_n(x)$ 可表示成：$\overline{\lim}\,f_n(x)=\inf\{g_n(x);\ n=1,2,\cdots\}$，这里，$g_n(x)=\sup\{f_k(x);k=n,n+1,\cdots\}$，利用上面已証明的 $\sup\{f_k(x)\}$ 及 $\inf\{f_k(x)\}$ 的可测性，可見 $\overline{\lim}\,f_n(x)$ 亦为可测。同样可証 $\underline{\lim}\,f_n(x)$，$\lim f_n(x)$ 亦可

测。　　证毕

［問題］ R^n 上的連續函数为 Baire 函数。

最簡单的 $\mathfrak{B}$ 可测函数称为 $\mathfrak{B}$ **簡单函数**。設有互不相交的集合 $A_1, \cdots, A_r \in \mathfrak{B}$，又設 $a_1, a_2, \cdots, a_r \in R$，置

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_i c_{A_i}(x),$$

則称 $f(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 簡单函数。也就是說：它在 $x \in A_i$ 时等于 a_i，而在 $x \in X - \bigcup_{k=1}^{r} A_i$ 时等于 0。显然，$\mathfrak{B}$ 簡单函数为 $\mathfrak{B}$ 可测。又如 f, g 为 $\mathfrak{B}$ 簡单函数，則 $af+bg$, $f \cdot g$, $|f|$, f^+, f^- 亦为 $\mathfrak{B}$ 簡单函数。

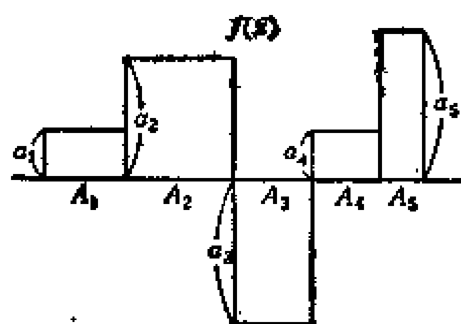


图　24.1

24.6　任一 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x) \geqslant 0$ 可表为单调不減的 $\mathfrak{B}$ 簡单函数列 $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots$ 的极限，即 $f(x) = \lim f_n(x)$（显然 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ 的取法不是唯一的）。

証明　例如取 $f_n(x) = n$（当 $f(x) \geqslant n$ 时），$f_n(x) = (r-1)/2^n$（当 $(r-1)/2^n \leqslant f(x) < r/2^n$ 时）（$r = 1, 2, \cdots, n \cdot 2^n$）便是一种符合要求的选法。　　証毕

設 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 为测度空間。若两个 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足等式

$$m(\{x; x \in X, f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

則称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为**等价**，并記之为 $f \sim g$。显然它具有等价关系。

$A \in \mathfrak{B}$, $m(A) = 0$ 那样的集合 A 称为**零集合**（請注意零集合与空集合的区别）。此后把"除了某个零集外"改說成"**几乎处处**"。例如，$f \sim g$ 可以說：等式 $f(x) = g(x)$ 几乎处处成立。

此外，今后将容許可测函数 $f(x)$ 在某零集合上取 ∞ 或 $-\infty$ 的值，也就是說，只假定它几乎处处为有限。

24.7 Egoroff 定理 在有界测度空間 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 中，設有 $\mathfrak{B}$ 可测函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 几乎处处收斂于 $f(x)$，則对任意的 $\varepsilon>0$，总可适当选取满足 $m(H)<\varepsilon$ 的 $H\in\mathfrak{B}$，使得在 $X-H$ 上 $\lim f_n(x)=f(x)$ 为一致收斂。

証明 設 $A\in\mathfrak{B}, m(A)=0$，当 $x\in X-A$ 时，$\lim f_n(x)=f(x)$。置 $A_m(\varepsilon)=\bigcap_{k=m}^{\infty}\{x; |f_k(x)-f(x)|<\varepsilon\}$，則 $A_m(\varepsilon)\in\mathfrak{B}$，$A_1(\varepsilon)\subset A_2(\varepsilon)\subset\cdots$，$\lim A_n(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n(\varepsilon)\supset X-A$。从而对于充分大的 n_r，有 $m(A_{n_r}(1/2^r))>m(X)-1/2^r$。現在，对于所給的 $\varepsilon>0$，取 $1/2^m<\varepsilon$，并置 $H=X-\bigcap_{r=m+1}^{\infty}A_{n_r}(1/2^r)=\bigcup_{r=m+1}^{\infty}A_{n_r}(1/2^r)^c\in\mathfrak{B}$，那么，一方面有 $m(H)\leqslant\sum_{r=m+1}^{\infty}m(A_{n_r}(1/2^r)^c)\leqslant\sum 1/2^r=1/2^m<\varepsilon$，另一方面在 $X-H$ 上 $\lim f_n(x)=f(x)$ 的收斂是一致的。 証毕

§25 Lebesgue 式积分

今后，当测度空間 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 給定的时候，凡 $\mathfrak{B}$ 可测，$\mathfrak{B}$ 簡单函数分别簡称为可测函数与簡单函数。

25.1* 首先，对于簡单函数 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{r}a_i c_{E_i}(x)$ $(E_i\in\mathfrak{B}, E_i\cap E_j=\emptyset(i\neq j))$ 定义它的积分为

(i) 当 $\varphi(x)\geqslant 0$，也即 $a_1\geqslant 0, \cdots, a_r\geqslant 0$ 的时候，若 $A\in\mathfrak{B}$，定义

$$\int_A \varphi(x)dm=\sum_{i=1}^{r}a_i m(E_i\cap A)\leqslant\infty.$$

(注意：$0\times\infty=0$。)

(ii) 对于一般的簡单函数 $\varphi(x)$，可将它表达为两个不取負值的簡单函数之差：$\varphi(x)=\varphi^+(x)-\varphi^-(x)$ $(\varphi^+(x)=\max(\varphi(x), 0)$，$\varphi^-(x)=\max(-\varphi(x), 0))$，而一般地定义它的积分为

$$\int_A \varphi(x)dm=\int_A\varphi^+(x)dm-\int_A\varphi^-(x)dm.$$

但在右边成为 $\infty-\infty$ 的形式时，$\varphi(x)$ 之积分不予定义。当上面的积分为有限时，称 $f(x)$ 在 A 上可积(或称积分可能)。

25.2 如簡单函数 $\varphi(x)\geqslant 0$, $\psi(x)\geqslant 0$,而且 $A, B\in\mathfrak{B}(A\cap B=\emptyset)$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$,则下列等式成立:

$$\int_A\{a\varphi(x)+b\psi(x)\}dm=a\int_A\varphi(x)dm+b\int_A\psi(x)dm,$$

$$\int_{A\cup B}\varphi(x)dm=\int_A\varphi(x)dm+\int_B\varphi(x)dm.$$

又 $\varphi(x)$, $\psi(x)$, a, b 即使不 $\geqslant 0$, 只要 φ 及 ψ 在 A (及 B)上可积，上面的等式仍然成立。

这一定理几乎是不証自明的。

25.3* 設可测函数 $f(x)\geqslant 0$, 我們定义 $f(x)$ 在 $A\in\mathfrak{B}$ 上的积分为

$$(*)\quad \int_A f(x)dm=\sup\left\{\int_A\varphi(x)dm;\ 0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)\,(x\in A),\ \varphi\text{ 为簡单函数}\right\}\leqslant\infty.$$

对于一般的可测函数 $f(x)$，利用 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ 的表达式，定义它的积分为

$$\int_A f(x)dm=\int_A f^+(x)dm-\int_A f^-(x)dm.$$

象上面一样，如果右边成为 $\infty-\infty$ 的形式时，$f(x)$在 A 上之积分也不予定义。如右边的値为有限，则称 $f(x)$ 在 A 上可积(或称积分可能)。

也就是說，可测函数 $f(x)$在 $A(\in\mathfrak{B})$ 上或者积分不定，或者积分确定。而在积分确定的情形下函数 $f(x)$ 或者可积(即积分値有限)，或者积分为 ∞ 或 $-\infty$。

記号 dm 常用带有变数 x 的 $m(dx)$ 来代替。

从积分定义直接得

(i) 若 $m(A)=0$，则对于任意可测函数 $f(x)$，有

$$\int_A f(x)dm=0.$$

(ii) 若 $f\sim g$, $A\in\mathfrak{B}$，则在 A 上函数 f, g 的积分或同时不定，或同时确定。如属确定，必

$$\int_A f(x)dm=\int_A g(x)dm.$$

这就是說，关于 f, g 的积分并无区别。

积分定义(*)虽然有点抽象，但由下面的定理就会渐趋明朗。

25.4 可測函数 $f(x)\geqslant 0$ 表示为簡单函数的不减序列$\{\varphi_k\}$($x=1, 2, \cdots$)的极限时，即

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)\quad(x\in A),$$

则有

$$\int_A f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_A\varphi_n(x)dm$$

(即使两边都为 ∞ 也无妨)。

証明 由积分的定义，显然有(左边)$\geqslant$(右边)。要証明反向的不等式，只須証明对于任意的簡单函数 $\psi(x)$, $0\leqslant\psi(x)\leqslant f(x)$，有如下不等式

$$\int_A\psi(x)dm\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_A\varphi_n(x)dm$$

成立就够了。现在，設左边的积分为有限。并假定在 A 上有簡单函数 $\psi(x)=\sum_{i=1}^{r}a_i c_{E_i}(x)$, $a_i>0$，而 $m(E_i)<\infty$($i=1, \cdots, r$)。因此对于 $E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_r$ 的 $\lim\varphi_n(x)=f(x)$，适用 Egoroff 定理。即对于任意 $\varepsilon>0$，可选取满足 $m(H)<\varepsilon$ 的 $H\subset E$($H\in\mathfrak{B}$)，使得在 $E-H$ 上 $\lim\varphi_n(x)=f(x)$ 的收斂是一致的。从而对于任意的 $\delta>0$，有 $\varphi_n(x)\geqslant f(x)-\delta\geqslant\psi(x)-\delta$ ($n\geqslant n_0$, $x\in E-H$)，因此，关于它的簡单函数积分有如下的不等式：

$$\int_{A-H}\varphi_n(x)dm\geqslant\int_{A-H}(\psi(x)-\delta)^+dm$$

$$\geqslant\int_{A-H}\psi(x)dm-\delta m(E).$$

現在置 $a=\max(a_1, \cdots, a_r)$，則有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \varphi_n(x)dm\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_{A-H}\varphi_n(x)dm$$

$$\geqslant\int_{A-H}\psi(x)dm-\delta m(E)\geqslant\int_A\psi(x)dm-\delta m(E)-a\varepsilon.$$

若令 $\varepsilon\to0$，$\delta\to0$，便得到所要求的不等式。至于 $\psi(x)$ 在 A 上的积分为 ∞ 时可同样証明。 証毕

作为上面定理的推論，有：

25.5 設可測函数 $f(x)\geqslant0$，則

$$\int_A f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n\cdot2^n}\frac{1}{2^n}m(E(f, i/2^n)\cap A)\right\}.$$

証明 作簡单函数

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}n & (f(x)\geqslant n),\\ (r-1)/2^n((r-1)/2^n\leqslant f(x)<r/2^n)(r=1, \cdots, n\cdot2^n),\end{cases}$$

由于 $0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots$，$\lim\varphi_n(x)=f(x)$，应用25.4定理[上式右边{ }等于 $\varphi_n(x)$ 在 A 上的积分]，就可証明定理中的結果。 証毕

利用25.4还可导出下面关于非負可測函数的若干基本性質。

25.6 設 $f(x), g(x), f_n(x), g_n(x), \cdots$ 都是 $\geqslant0$ 的可測函数。

(i) 若 $A\in\mathfrak{B}$，$a\geqslant0$，$b\geqslant0$，則

$$\int_A(af(x)+bg(x))dm=a\int_A f(x)dm+b\int_B g(x)dm.$$

(ii) 若 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$，則

$$\int_A f(x)dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A g_n(x)dm.$$

(ii′) 若 $A_1, A_2, \cdots\in\mathfrak{B}$，$A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j)$，則对于 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，有

$$\int_A f(x)dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f(x)dm.$$

(ii″) 若 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots$, $\lim f_n(x)=f(x)$, 则

$$\int_A f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dm.$$

(iii) **Fatou 不等式**　对于任意的 $f_n(x)\geqslant 0$ $(n=1, 2, \cdots)$, 有

$$\int_A \underline{\lim}\, f_n(x)dm\leqslant \underline{\lim}\int_A f_n(x)dm.$$

(以上各式中的积分值即使是 ∞ 也无妨。)

証明　(i) 表 $f(x)=\lim\varphi_n(x)$, $g(x)=\lim\psi_n(x)$ 为简单函数的不减序列的极限,则从 $af(x)+bg(x)=\lim\{a\varphi_n(x)+b\psi_n(x)\}$ 并应用 25.2 即得

$$\int_A (af+bg)dm=\lim\int_A (a\varphi_n+b\psi_n)dm$$

$$=\lim\left\{a\int_A \varphi_n dm+b\int_A \psi_n dm\right\}=a\int_A f\,dm+b\int_A g\,dm.$$

(ii) 設 $g_n(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\psi_{k,n}(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 为简单函数的不减序列的极限,则 $f(x)$ 可表为 $f(x)=\lim\varphi_n(x)$, 而 $\varphi_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\psi_{k,n}(x)$, 由此得

$$\int_A f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_A \varphi_n(x)dx=\lim\left(\sum_{k=1}^{n}\int_A \psi_{k,n}(x)dm\right)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_A g_n(x)dm.$$

反向的不等式可由(i)导出。

(ii′) 利用关系式

$$\int_A f(x)dm=\int_X c_A(x)f(x)dm,$$

便可归到(ii)的情形。

(ii″) 置 $g_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$ $(f_0(x)=0)$, 便归到(i), (ii)

的情形。

(iii) 置 $g_n(x)=\inf\{f_k(x); k=n, n+1, \cdots\}$，于是有

$g_n(x)\leqslant f_n(x) \quad (n=1, 2, \cdots), 0\leqslant g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots,$

$\lim g_n(x)=\underline{\lim} f_n(x).$

从而

$$\int_A \underline{\lim} f_n(x)dm=\int_A \lim_{n\to\infty} g_n(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)dm$$

$$\leqslant\underline{\lim}\int_A f_n(x)dm.$$

証毕

其次，当函数不限于非負值时，倘有下面的結果：

25.7 若可测函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $A(\in\mathfrak{B})$ 上为可积，則

(i) $|f(x)|$，$af(x)$，$af(x)+bg(x)$ 也可积。

(ii) $|h(x)|\leqslant|f(x)|$ 的可测函数 $h(x)$ 也可积。

本定理的証明可由定义自明。特别是 $f(x)$ 可积时 $|f(x)|$ 也可积的这一性质比之在 $X=(-\infty, \infty)$ 上的 Riemann 积分更显得簡单。

25.8 設 $f(x)$，$g(x)$ 在 $A(\in\mathfrak{B})$ 上可积。

(i) 若 $A\cap B=\emptyset$，則

$$\int_{A\cup B} f(x)dm=\int_A f(x)dm+\int_B f(x)dm.$$

(ii) 对于实数 a，b，有

$$\int_A (af(x)+bg(x))dm=a\int_A f(x)dm+b\int_A g(x)dm.$$

(iii) **Lebesgue 的极限定理** 若 $s(x)\geqslant0$ 在 A 上可积，且 $|f_n(x)|\leqslant s(x) \quad (n=1, 2, \cdots)$，$\lim f_n(x)=f(x)$，則对于任意的 $E\in\mathfrak{B}$，有

$$\int_E f(x)dm=\lim\int_E f_n(x)dm.$$

証明 (i) 由定义及本节 25.2 可直接导出。

(ii) 只証 $a=b=1$ 的情形。置 $h(x)=f(x)+g(x)$，并在 E 上，命 $A_1=\{x;\ f(x)\geqslant 0\}$，$A_2=\{x;\ f(x)<0\}$，$B_1=\{x;\ g(x)\geqslant 0\}$，$B_2=\{x;\ g(x)<0\}$，$C_1=\{x;\ h(x)\geqslant 0\}$，$C_2=\{x;\ h(x)<0\}$。

那么 $E=\bigcup_{i,j,k=1,2}(A_i\cap B_j\cap C_k)$ 显然由互不相交的集合所組成，但 $A_1\cap B_1\cap C_2=A_2\cap B_2\cap C_1=\emptyset$。由于有(i)的結果，故所求的等式只須在各 $A_i\cap B_j\cap C_k=E_{ijk}$ 上加以証明就够了。例如在 E_{121} 上，因有 $f(x)\geqslant 0$，$-g(x)>0$，$h(x)\geqslant 0$，及 $f(x)=(-g(x))+h(x)$，由本节 25.6，(i)可得

$$\int_{E_{121}} f(x)dm=\int_{E_{121}} -g(x)dm+\int_{E_{121}} h(x)dm.$$

如果将右边第一項移至左边，就得在 E_{121} 上所求的等式

$$\int_{E_{121}}(f(x)+g(x))dm=\int_{E_{121}} f(x)dm+\int_{E_{121}} g(x)dm$$

同样可处理其他的 E_{ijk}。

(iii) 由于 $s(x)+f_n(x)\geqslant 0$，$s(x)-f_n(x)\geqslant 0$，应用 Fatou 不等式及(ii)即得

$$\int_A s(x)dm+\underline{\lim}\int_A f_n(x)dm=\underline{\lim}\int_A(s(x)+f_n(x))dm$$
$$\geqslant\int_A(s(x)+f(x))dm=\int_A s(x)dm+\int_A f(x)dm,$$

及

$$\int_A s(x)dm-\overline{\lim}\int_A f_n(x)dm=\underline{\lim}\int_A(s(x)-f_n(x))dm$$
$$\geqslant\int_A(s(x)-f(x))dm=\int_A s(x)dm-\int_A f(x)dm.$$

从上面两不等式的两边消去 $\int_A s(x)dm$，则得

$$\underline{\lim}\int_A f_n(x)dm\geqslant\int_A f(x)dm\geqslant\overline{\lim}\int_A f_n(x)dm.$$

从此立即可导出我們所要求的等式。　　証毕

［問題］(i) 設 $f(x)$ 为可积，对于 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，$A_i\cap A_j=\emptyset\ (A_i\in\mathfrak{B})$，有

$$\int_A f(x)dm=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} f(x)dm.$$

(ii) 若 $\int_X |f(x)|dm=0$，則 $f\sim 0$。

下面，叙述一下关于直积测度空間的 Fubini 定理。

設两个有界或准有界测度空間 $(X, \mathfrak{B}_X, m_X)$，$(Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$ 的直积测度空間为 $(Z, \mathfrak{B}_Z, m_Z)$，$Z=X\times Y$，$\mathfrak{B}_Z=B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)$，$m_Z=m_X\times m_Y$。首先有：

25.9 (i) 若 $f(x, y)$ 为 $\mathfrak{B}_Z$ 可測，則对于每一个 $y_0\in Y$，把 $f(x, y_0)$ 看作是定义在 X 上的函数时，它是 $\mathfrak{B}_X$ 可測的。

(ii) 設 $E\in\mathfrak{B}_Z$，$m_Z(E)<+\infty$。置 $E(y)=\{x; (x, y)\in E\}$，則 $f(y)=m_X(E(y))$ 为 $\mathfrak{B}_X$ 可測，而且有

$$m_Z(E)=\int_Y f(y)dm_Y.$$

証明 (i) $\{x; f(x, y_0)\geqslant a\}$ 为 $\{(x, y); f(x, y)\geqslant a\}$ 沿 $y=y_0$ 的截口集合，从而由 22.4 可知 $\{x; f(x, y_0)\geqslant a\}$ 屬于 $\mathfrak{B}_X$。

(ii) 考虑 $m_X(X)<+\infty$ 及 $m_Y(Y)<+\infty$ 的情形。当 $E\in\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y$ 时，(ii)式显然成立。在一般情形，設 $\mathfrak{N}$ 表示对于 (ii) 成立的所有 E 的全体。由 25.8，$\mathfrak{N}$ 显然构成为一正規集合族。从而有 $\mathfrak{N}\supset N(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)=B(\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y)=\mathfrak{B}_Z$，由此可見，当 $E\in\mathfrak{B}_Z$ 时 (ii) 式成立。至于准有界情形的証明亦可归結于此。 証毕

注意 准有界时，虽然存在 y 使 $f(y)=\infty$，但 $f(y)$ 是几乎处处有限的。

25.10 Fubini 定理 設 $\mathfrak{B}_Z$ 可測函数 $f(x, y)$ 为关于 m_Z 可积，則

(i) 存在着某一个 $B\in\mathfrak{B}_Y$，$m_Y(B)=0$，如把 $f(x, y_0)$ 除了 $y_0\in B$ 而外，看作是 x 的函数，那末 $f(x, y_0)$ 关于 m_X 为可积。

(ii) 对于 $(y\overline{\in} B)$，

$$F(y)=\int_X f(x, y)dm_X$$

为 $\mathfrak{B}_Y$ 可测，且关于 m_Y 为可积。

(iii) 对于 $y\in B$，置 $F(y)=0$，則下面等式成立：

$$\int_Z f(x,y)dm_Z=\int_Y\left\{\int_X f(x,y)dm_X\right\}dm_Y.$$

X 与 Y 互易，結果相同。

証明　按照 25.9，当 $f(x,y)=c_E(x,y)$，$E\in\mathfrak{B}_Z$，$m_Z(E)<+\infty$ 的时候，定理显然成立。其次，以 $\mathfrak{F}$ 表示满足 (i)，(ii)，(iii)的 f 的全体，(a)若 f，$g\in\mathfrak{F}$，那么 $af+bg\in\mathfrak{F}$，(b) 若 $f_n\in\mathfrak{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，$0\leqslant f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots$，$\lim f_n(x,y)=f(x,y)$，而且 $f(x,y)$ 也可积。这时，按照 25.8 容易証明 $f\in\mathfrak{F}$。因为 $c_E(x,y)$ 属于 $\mathfrak{F}$，而它是属于 $\mathfrak{F}$ 的可积簡单函数，从而由 (a)，(b) 可知任意可积的 $f(x,y)$ 也属于 $\mathfrak{F}$。　　**証毕**

注意　用完备直积测度空間 $(Z,\overline{\mathfrak{B}}_Z,\overline{m}_Z)$ 代替直积测度空間时，上面的結果要稍为修正，即

(i) 若 $f(x,y)$ 为 $\overline{\mathfrak{B}}_Z$ 可测而且关于 $\overline{m}_Z$ 可积，那末必有集合 B，$\overline{m}_Y(B)=0$ 使 $f(x,y_0)$ 除了 $y_0\in B$ 而外，作为 x 的函数时为 $\overline{\mathfrak{B}}_X$ 可测而且关于 $\overline{m}_X$ 可积（即在 25.9，$m_Y(B)=0$ 那样的 B 也要除外）。(ii)，(iii) 与 25.10 有相同的形式，但应用 $\overline{\mathfrak{B}}_X$，$\overline{\mathfrak{B}}_Y$，$\overline{m}_X$，$\overline{m}_Y$ 代替 $\mathfrak{B}_X$，$\mathfrak{B}_Y$，m_X，m_Y。

在考虑 $R^{m+n}=R^m\times R^n$ 上的 Lebesgue 测度时，因为 $\mathfrak{B}^{m+n}=\overline{B(\mathfrak{B}^m\times\mathfrak{B}^n)}$，所以必須应用此种情形的結果。

§26　函数空間

設 $(X,\mathfrak{B},m)$ 为测度空間。定义在 X 的可测函数 $f(x)$ 并满足

$$\int_X|f(x)|^p dm<\infty\qquad(1\leqslant p<\infty).$$

的全体記为 $L^{(p)}$。（但当 $f\sim g$ 时，f 与 g 在 $L^{(p)}$ 中表示同一元素。說得正确一些，就是 $L^{(p)}$ 作为以等价关系～而分类的商空間 $L^{(p)}/\sim$。）在 16.1 的 Hölder 及 Minkowski 不等式中，如果用 $\int$ 代替 $\sum$，則不等关系仍然成立：

Hölder 不等式　設 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, f\in L^{(p)}, q\in L^{(q)}$, 则

$$\left|\int_X f(x)g(x)\,dm\right| \leqslant \left\{\int_X |f(x)|^p dm\right\}^{1/p}\left\{\int_X |g(x)|^q dm\right\}^{1/q}.$$

(当 $p=q=2$ 时，上式就变成 Schwarz 不等式。)

Minkowski 不等式　若 $p\geqslant 1$, $f, g\in L^{(p)}$, 则

$$\left\{\int_X |f(x)+g(x)|^p dm\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_X |f(x)|^p dm\right\}^{1/p} + \left\{\int_X |g(x)|^p dm\right\}^{1/p}.$$

由此 $L^{(p)}$ 构成一向量空間，对于 $f\in L^{(p)}$, 置

$$\|f\|_p = \left\{\int_X |f(x)|^p dm\right\}^{1/p},$$

那么显然具有范数的性質：

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,\quad \|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$$

(及 $\|f\|_p=0 \Leftrightarrow f\sim 0$).

26.1　$L^{(p)}$ 以上面的范数构成 Banach 空間。

証明　剩下来的是完备性。現在設 $f_1, f_2, \cdots\in L^{(p)}$, 而且 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|f_m-f_n\|_p=0$. 首先取子列 $\{f_{n_k};\ k=1, 2, \cdots\}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p=K<\infty$. 这时，如果 $\lim f_{n_k}=f(\in L^{(p)})$ 存在，可导出 $\lim f_n=f$. 因此，不妨一开始就假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n-f_{n+1}\|_p<\infty$. 置 $g_n(x)=|f_1(x)|+\sum\limits_{k=1}^{n-1}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|$, 则 $g_n(x)\in L^{(p)}(n=1, 2, \cdots)$而且 $g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots$, 从而由 25.6 的 Fatou 不等式，对于 $g(x)=\lim g_n(x)$, 有

$$\int_X |g(x)|^p dm = \lim_{n\to\infty}\int_X |g_n(x)|^p dm\ (\leqslant\infty).$$

另外一方面有 $\|g_n\|_p\leqslant\|f_1\|_p+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\|f_{k+1}-f_k\|_p\leqslant K'<\infty$. 因此 $g\in L^{(p)}$. 其次 $f_n(x)=f_1(x)+(f_2(x)-f_1(x))+\cdots+(f_n(x)$

$-f_{n-1}(x))$，与 $g_n(x)$ 比較有 $|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|g_m(x)-g_n(x)|$，而且从 $\lim g_n(x)=g(x)$（几乎处处）的存在，可知 $\lim f_n(x)=f(x)$（几乎处处）也存在。并且因 $|f(x)|\leqslant g(x)$，$g(x)\in L^{(p)}$，故有 $f(x)\in L^{(p)}$。此外，从

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x))\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|\leqslant g(x)$$

可知 $|f(x)-f_n(x)|^p\leqslant g(x)^p$ 为可积，再由 Lebesgue 的极限定理 25.8，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_X|f(x)-f_n(x)|^p dm=\int_X \lim|f(x)-f_n(x)|^p dm=0.$$

从这等式就証明了 $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0$。 証毕

26.2 特别是，在 $L^{(2)}$ 中，記内积为

$$(f,g)=\int_X f(x)g(x)dm \quad (f,g\in L^{(2)}),$$

则 $L^{(2)}$ 构成一个 Hilbert 空間。

由 Schwarz 不等式可知 (f,g) 有确定的意义。

兹举出 $L^{(2)}$ 为可分的充要条件之一于下。对于 $A,B\in\mathfrak{B}$，定义它的距离为

$$\rho(A,B)=m(A\cup B-A\cap B)=\int_X|c_A(x)-c_B(x)|dm.$$

[$\rho(A,B)=0$ 的充要条件是：A,B 除零集外完全一致。这时記为：$A\sim B$。] 从而 $\mathfrak{B}/\sim$ 是一距离空間。

26.3 $L^{(2)}$（一般的 $L^{(p)}$）可分的充要条件是：距离空間 $(\mathfrak{B}/\sim,\rho)$ 为可分。这个条件也特别适用于测度空間 $(R^n,\mathfrak{B}^n,m_n)$。

[問題] 証明 26.3。

今补上函数空間为 Banach 空間的一例。所謂可测函数 $f(x)$ 为几乎处处有界（或称本质有界）意指：存在有一个 $a>0$，使得 $|f(x)|\leqslant a$ 几乎处处成立。

26.4 設 M 为在 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 上几乎处处有界的可測函数的全体，当 $f \in M$ 时，置

$$\|f\| = \inf\{a; |f(x)| \leqslant a \text{（几乎处处）}\},$$

那么 M 是 Banach 空間。

証明是不言而喻的。关于范数 $f_n \to f$，那就是除开某一零集合外，$f_n(x)$ 一致收斂于 $f(x)$。

以上，在各个函数空間中定义了許多种类的收斂。現在再叙述若干收斂定义。对于 $f, f_1, f_2, \cdots \in L^{(p)}$ $(1 \leqslant p < \infty)$，当

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

的时候，称 f_n 为 **p 次平均收斂于** f。此外尚有

26.5* 对于在測度空間 $(X, \mathfrak{B}, m)$ 中定义的可測函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$，所謂 $\{f_n(x)\}$ **几乎处处收斂于** $f(x)$，意指存在一个零集合 A，有下面的关系式成立：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \overline{\in} A.$$

其次，对于任意的 $\varepsilon > 0$，如有关系式

$$\lim_{n\to\infty} m\{x; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$$

成立，则称 $\{f_n(x)\}$ **漸近收斂于** $f(x)$（或称**度量收斂**，**依測度收斂**）。所謂 $\{f_n(x)\}$ 为**漸近基本列**（或称**度量基本列**，**依測度基本列**），意指，对于 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{m,n\to\infty} m\{x; |f_m(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

［問題］ 設 $m(X) < \infty$，如果 $\{f_n(x)\}$ 几乎处处收斂于 $f(x)$，那么 $\{f_n(x)\}$ 測度收斂于 $f(x)$。反过来未必为真。这两个收斂，当 $m(X) = \infty$ 的时候，并沒有所謂一种收斂比另一种强的情形。（試求这些的反例。）

26.6 (i) 設可測函数列 $\{f_n(x)\}$ 为測度基本列，則可选取适当的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收斂于 $f(x)$ 而且同时測度收斂于 $f(x)$。

(ii) 若 $\{f_n(x)\}$ 为 p 次平均收斂于 $f(x)$，則必測度收斂于

$f(x)$。

証明 (i) 按照假設，可取子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ $(n_1<n_2<\cdots)$，使得

$$E_k=\{x;|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|>1/2^k\},\quad m(E_k)<1/2^k.$$

若置 $E=\overline{\lim}\,E_n$，那么有

$$m(E)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)=\lim_{n\to\infty}m(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}(1/2^k)=0.$$

而且对于 $x\in E^c=\underline{\lim}\,E_k^c$，$\lim f_{n_k}(x)$ 收斂。它的极限記为 $f(x)$。現在若置 $E^{(m)}=\bigcup_{k=m}^{\infty}E_k$，那么 $m(E^m)\leqslant 1/2^{m-1}$，而且对于 $x\overline{\in}E^{(m)}$，有 $|f(x)-f_{n_m}(x)|\leqslant 1/2^m$。显然可見 $\{f_{n_k}(x)\}$ 測度收斂于 $f(x)$。

(ii)的証明留給讀者。 証毕

§27 連續函数的积分与测度

为了叙述簡单起見，設区間 $[0,1]=X$。在 X 上定义的連續函数都为 $\mathfrak{B}^1$ 可測。現在关于 $\mathfrak{B}^1$ 上的任意測度 m（但設 $m(X)=1$），置（Lebesgue-Stieltjes 积分）

$$(*)\qquad Mf=\int_X f(x)\,dm,$$

那么，有

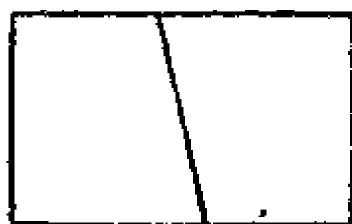
FI　$M(\alpha f+\beta g)=\alpha Mf+\beta Mg$,

FII　$M1=1$,

FIII　若 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in X)$，則 $Mf\geqslant 0$。

这就是説：在連續函数全体所构成的向量空間 $C(X)$ 中，确定了一个滿足 FI, FII, FIII 的綫性泛函数 $f\to Mf$。反之，設 Mf 为定义在 $C(X)$ 上而具有上面性質的泛函数，如果在 $O_t=[0,t)$ 上置

$$f_{n,t}(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant t-1/n),\\ 1-n(t-x+1/n) & (t-1/n\leqslant x\leqslant t),\\ 0 & (t\leqslant x\leqslant 1),\end{cases}$$


图　27.1

那末有 $\lim_{n\to\infty} f_{n,t}(x)=c_{O_t}(x)$。若置

$$F(t)=\lim_{n\to\infty} Mf_{n,t}\quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

并以 $\{F(t)\}$ 所确定的 Lebesgue-Stieltjes 測度取为 m，則可証明(*)成立。更一般的有：

27.1　設 X 为紧空間，$\mathfrak{B}$ 为 X 的 Borel 集合体(即由 X 的所有开集合 $\mathfrak{O}(X)$ 构成的 Borel 集合体 $\mathfrak{B}=B(\mathfrak{O}(X))$)。若 Mf 为定义在 $C(X)$ 上而满足 FI, FII, FIII 的泛函数($f\to Mf$)，那末在 $\mathfrak{B}$ 上存在某一个測度 m，使得

$$Mf=\int_X f(x)dm.$$

其次，如果設

$$m(E)=\inf\{m(O);\ E\subset O\text{: 开集合}\}\quad (E\in\mathfrak{B}),$$

那末这个測度 m 是唯一的。

这里仅叙述一下証明的方法。它与1維的情形相同。即对于 $O\in\mathfrak{O}(X)$，設

$$S(O)=\{f(x);\ 0\leqslant f(x)\leqslant c_O(x),\ f\in C(X)\},$$

置

$$m^*(O)=\sup\{Mf;\ f\in S(O)\}.$$

由于 X 是正規空間，所以若 $O_1,\ O_2\in\mathfrak{O}(X)$，就有 $S(O_1\cup O_2)\subset S(O_1)+S(O_2)$。(11.8 問題。) 应用这結果可証明：(i)若 $O_1\subset O_2$，則 $m^*(O_1)\leqslant m^*(O_2)$，(ii)若 $O_1\cap O_2=\emptyset$，則 $m^*(O_1\cup O_2)=m^*(O_1)+m^*(O_2)$，(iii) $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m^*(O_n)$。其次，对于任意的 $E\subset X$，置

$$m^*(E)=\inf\{m^*(O);\ E\subset O\in\mathfrak{O}(X)\},$$

从上面的(i)，(ii)，(iii)可証 m^* 为 X 上的 Carathéodory 外測度。由于所有的 $O\in\mathfrak{O}(X)$ 皆为 m^* 可测，因此可导出 $\mathfrak{B}=B(\mathfrak{O}(X))\subset\mathfrak{B}^*$。最后，对于这个測度 m，設 $0\leqslant f(x)\leqslant K$，$f\in C(X)$，那末

$$\int_X f(x)dm^* = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K2^n} \frac{1}{2^n} m^*\left\{x; f(x) > \frac{k}{2^n}\right\}.$$

而且对于 $O_{k,n} = \{x; f(x) > k/2^n\}$，如果取 $f_{k,n} \in S(O_{k,n})$，$Mf_{k,n} + \varepsilon \geqslant m^*(O_{k,n})$，那末，从 $f(x) \geqslant \left\{\sum_{k=1}^{K2^n} f_{k,n}(x)\right\} \Big/ 2^n$ 即得

$$Mf \geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{K2^n} Mf_{k,n} \geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{K2^n} m^*(O_{k,n}) - K\varepsilon.$$

若 $\varepsilon \to 0$，令 $n \to \infty$，即得 $Mf \geqslant \int_X f(x)dm$。反之，以 $K - f(x) \geqslant 0$ 代 f，并注意到 $M1 = 1$ 及 $\int_X 1\, dm = 1$，即得反向不等式。　　証毕

以上虽然只在紧空間 X 上来說明，但在 R^n 或一般的局部紧空間 X 上，定理同样也成立。設 $C(X)$ 表示定义在 X 上的連續函数 $f(x)$，而其支集

$$S(f) = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$$

是 X 的紧集中含的函数 f 的全体，則 27.1 依然成立（參看 Halmos[7]）。

§28 集合函数及 Radon-Nikodym 定理

設 $\mathfrak{B}(\subset \mathfrak{P}(X))$ 为集合 X 上的 Borel 集合体。

28.1* 所謂在 $\mathfrak{B}$ 上定义了一个完全加法函数 μ，意指：

(i) 对于所有的 $E \in \mathfrak{B}$，就有一实数 $\mu(E)(\neq \pm\infty)$与之对应，

(ii) 若 $E_1, E_2, \cdots \in \mathfrak{B}$，$E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$，則

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \qquad \text{(但假定右边絕对收斂)。}$$

例如，定义在 $\mathfrak{B}$ 上的有界測度就是完全加法的集合函数。除此以外，設 $f(x)$ 为关于 $\mathfrak{B}$ 上的測度 m 可积的函数，置

$$(*) \qquad \mu_f^m(E) = \int_E f(x)dm,$$

那末，依 25.8 的問題可知 μ_f^m 是完全加法集合函数。

反之，設有 $\mathfrak{B}$ 上的集合函数 μ，及已知有界測度 m，何时始有 $\mu=\mu_f^m$？要解决这个問題，有所謂 Radon–Nikodym 定理。

28.2* 設 μ 为 $\mathfrak{B}$ 上的完全加法集合函数，所謂 μ 关于 $\mathfrak{B}$ 上的有界測度 m 为**絕对連續**，意指：

$$m(E)=0 \Rightarrow \mu(E)=0 \quad (E\in\mathfrak{B}).$$

所謂 μ 关于 m 为**奇异**，意指：存在着一个 $E\in\mathfrak{B}$ 而 $m(E)=0$，使得下面等式成立：

$$\mu(A)=\mu(A\cap E) \quad (A\in\mathfrak{B}).$$

只有在 $\mu=0$ 的情形下，才有关于 m 为絕对連續而同时又是奇异的 μ。μ_f^m 关于 m 为絕对連續。19.10 的例則关于一般的 Lebesgue 測度为奇异。

28.3 Radon–Nikodym 定理 設 $\mathfrak{B}$ 为 Borel 集合体，m 为 $\mathfrak{B}$ 上的有界測度，

(i) 設 μ 为 $\mathfrak{B}$ 上的任意的完全加性集合函数，則 μ 可唯一地表示为

$$\mu=\mu_1+\mu_2,$$

这里，μ_1 是关于 m 为絕对連續，而 μ_2 是关于 m 为奇异。

(ii) 若 μ 为 $\mathfrak{B}$ 上的任意完全加法集合函数，那末存在着（关于 m）某一可积函数 $f(x)$，使得 $\mu=\mu_f^m$，即等式

$$\mu(E)=\int_E f(x)dm$$

成立的充要条件是：μ 关于 m 为絕对連續。这时，f 是关于 μ 为唯一确定的（对等价类而言）。

証明的方法有好几种，玆举一种所謂向量格的方法于下。

所謂集合 L 为**向量格**，意指它滿足下面(i)～(iv) 的条件。

(i) L 为向量空間，(ii) L 是有序集合而且构成格（参考 §4, 4.8），(iii) 設 $f, g\in L$, $f\geqslant g$，那末对于任意的 $h\in L$，有 $f+h\geqslant g+h$，(iv)若 $f, g\in L$，$f\geqslant g$, $\lambda>0$，則 $\lambda f\geqslant\lambda g$。

例如，在 4.8* 的例 2，若 $F=R^X$ 就是向量格。此外，$L^{(1)}(\subset R^X)$ 也是向量格。

一般在向量格中，置 $f^+=f\cup 0$，$f^-=(-f)\cup 0$，则 Jordan **分解定理**成立：

$$f=f^+-f^-,\ f^+\cap f^-=0.$$

証明 从定义直接得 $f\geqslant g\Leftrightarrow f-g\geqslant 0$，$f\geqslant g\Leftrightarrow -f\leqslant -g$，$(f\cup g)+h=(f+h)\cup(g+h)$，$(f\cap g)+h=(f+h)\cap(g+h)$，若 $\lambda>0$，显然有 $\lambda(f\cup g)=(\lambda f)\cup(\lambda g)$ 及 $\lambda(f\cap g)=(\lambda f)\cap(\lambda g)$，若 $\lambda<0$，显然有 $\lambda(f\cap g)=(\lambda f)\cup(\lambda g)$ 及 $\lambda(f\cup g)=(\lambda f)\cap(\lambda g)$。从上面，首先有

$$(f\cup g)+(f\cap g)=f+g,$$

这是因为： $(f\cup g)-(f+g)=(-g)\cup(-f)=-(f\cap g)$。

分配律 $(f\cup g)\cap h=(f\cap h)\cup(g\cap h)$，$(f\cap g)\cup h=(f\cup h)\cap(g\cup h)$。因在第1式，左边$\geqslant$右边是显然的。为了証明反向$\leqslant$，只要能証明从 $k\geqslant f\cap h$ 及 $k\geqslant g\cap h$ 可导出 $k\geqslant(f\cup g)\cap h$ 就可以了。实际上，从 $k\geqslant f\cap h$ 可得 $k\geqslant f+h-f\cup h$，同样从 $k\geqslant g\cap h$ 可得 $k\geqslant g+h-g\cup h$。由此即得 $k+f\cup g\cup h=k+\{(f\cup h)\cup(g\cup h)\}=(k+f\cup h)\cup(k+g\cup h)\geqslant(f+h)\cup(g+h)=(f\cup g)+h$，从而有 $k\geqslant(f\cup g)+h-f\cup g\cup h=(f\cup g)\cap h$。此外

$$f=f+0=(f\cup 0)+(f\cap 0)=(f\cup 0)-((-f)\cup 0)=f^+-f^-,$$

在 $f^+\cap f^-=(f\cup 0)\cap((-f)\cup 0)=\{f\cap(-f)\}\cup 0$ 中，由于 $2\{f\cap(-f)\}\leqslant\{f\cap(-f)\}+\{f\cup(-f)\}=f+(-f)=0$，故 $\{f\cap(-f)\}\cup 0=0$。

証畢

以上的处理方法若只应用于 $F=R^X$，则价值不大，但如应用到集合函数上去，那就有如下的結果。

首先，設 V 为 $\mathfrak{B}$ 上的完全加性集合函数的全体。若 $\mu_1,\mu_2\in V$ $(\alpha,\beta\in R)$，置

$$(\alpha\mu_1+\beta\mu_2)(E)=\alpha\mu_1(E)+\beta\mu_2(E)\quad(E\in\mathfrak{B}),$$

那末 V 就构成向量空間。其次，当 $\mu\in V$ 时 μ **为有界变分**：設 $\Delta=\{E_1,\cdots,E_n\}$为属于 $\mathfrak{B}$ 的任一分割，而

$$\|\mu\|=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|;\ 所有\ \Delta\right\}$$

可証明它为有限。設 $\mu_1,\mu_2\in V$，如果 $\mu_1(E)\leqslant\mu_2(E)$ 对于所有的 E 都成立，那末定义 $\mu_1\leqslant\mu_2$。对于任意 $\mu_1,\mu_2\in V$，置

$$\mu(E)=\sup\{\mu_1(E_1)+\mu_2(E_2);\ E=E_1\cup E_2,\ E_1\cap E_2=\emptyset\}<\infty,$$

$$\mu'(E)=\inf\{\mu_1(E_1)+\mu_2(E_2);\ E=E_1\cup E_2,\ E_1\cap E_2=\emptyset\}>-\infty,$$

則显然有 $\mu,\ \mu'\in V$，而且 $\mu=\mu_1\cup\mu_2,\ \mu'=\mu_1\cap\mu_2$。

［問題］試証上面的定理。

28.4　V 构成一向量束。

从而由向量束的一般性质有：

28.5　Jordan 分解定理

$$\mu=\mu^+-\mu^-,\qquad \mu^+\cap\mu^-=0.$$

这里：

$$\mu^+(E)=(\mu\cup 0)(E)=\sup\{\mu(A);\ A\subset E\}\geqslant 0,$$

$$\mu^-(E)=\{(-\mu)\cup 0\}=\sup\{-\mu(A);\ A\subset E\}\geqslant 0.$$

从此有：

28.6　Hahn 的分解　对于任意的 $\mu\in V$，存在着一个 $E_0\in\mathfrak{B}$，使得

$$\mu^+(A)=\mu(E_0\cap A),\ \mu^-(A)=-\mu(E_0^c\cap A)\qquad(A\in\mathfrak{B}).$$

証明　从 $\mu^+\cap\mu^-=0$ 可得 $0=0(X)=\inf\{\mu^+(E)+\mu^-(E^c)\}$，从而对于 $n=1,2,\cdots$，可取满足 $\mu^+(E_n)\leqslant 1/2^n$，$\mu^-(E_n^c)\leqslant 1/2^n$ 的 E_n。置 $E_0=\overline{\lim}\,E_n^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k^c$，那末有 $E_0^c\leqslant\underline{\lim}\,E_n$，$\mu^+(E_0^c)=\mu^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu^+\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant\lim\mu^+(E_k)=0$ 及 $\mu^-(E_0)=\lim\mu^-\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k^c\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}1/2^k=0$。所以由 $\mu^+\geqslant 0,\ \mu^-\geqslant 0$ 可得 $\mu^+(E_0^c)=\mu^-(E_0)=0$。因而有下面等式成立：

$$\mu^+(A)=\mu^+(A\cap E_0)+\mu^+(A\cap E_0^c)=\mu^+(A\cap E_0),$$

$$\mu^-(A)=\mu^-(A\cap E_0^c).$$

証毕

以上是作为証明 28.3 的准备工作。要証明 28.3，只要証明

“对于任意的 $\mu\in V$，有（关于 m）可积 f 及奇异的 μ_s，使得 $\mu=\mu_f^m+\mu_s$”就够了。由于有 Jordan 分解定理，因此只要証 $\mu\geq 0$ 的情形就可以了。置 $H=\{f(x);\ \mu_f^m\leq\mu\}$，从 $M=\sup\{\mu_f^m(X);\ f\in H\}\leq\mu(X)<\infty$ 可取 $g_1(x),g_2(x),\cdots(\in H)$，使得 $\mu_{g_n}^m(X)\geq M-1/n$ $(n=1,2,\cdots)$。其次置 $f_n(x)=\max(g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_n(x))$，則 $f_1\leq f_2\leq\cdots$，$\mu_{f_n}^m=\mu_{g_1}^m\cup\mu_{g_2}^m\cup\cdots\cup\mu_{g_n}^m\leq\mu$，从而 $f_n\in H(n=1,2,\cdots)$，而且 $\lim\mu_{f_n}^m(X)=m$。由此，若置 $f(x)=\lim f_n(x)$，則 $\mu_f^m\leq\mu$ 而且 $\mu_f^m(X)=M$。所以若置 $\mu_s=\mu-\mu_f^m$，那么如果能証明 μ_s 是关于 m 为奇异就好了。

一般来讲，“当 $\mu_0\geq0$ 时，若是关于 m 不为奇异的話，那末就有 $\alpha>0(\alpha\in R)$ 及 $E_0\in\mathfrak{B}(m(E_0)>0)$ 存在，而对于所有的 $E\subset E_0$ $(E\in\mathfrak{B})$，有 $\mu_0(E)\geq\alpha m(E)$ 成立”。

这是因为，对于 $\alpha>0$，置 $\mu_\alpha=\mu_0-\alpha m$，依照 Hahn 定理，存在着 E_α 使得 $\mu_\alpha^+(A)=\mu_\alpha(A\cap E_\alpha)\geq0$。若命题中的 α，E_0 不存在，必有 $m(E_\alpha)=0$。从而若置 $E_0^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{1/n}(m(E_0^*)=0)$，必有 $\mu_0(E_0^{*c})\leq\mu_0(E_{1/n}^c)$，但如应用 Hahn 定理于 $\mu_{1/n}$，那就有 $\mu_{1/n}(E_{1/n}^c)=(\mu_0-m/n)(E_{1/n}^c)\leq0$。即 $\mu_0(E_{1/n}^c)\leq m(E_{1/n}^c)/n\leq m(X)/n$。由此当 $n\to\infty$ 时，就得 $\mu_0(E_0^{*c})=0$。这就是説 μ_0 关于 m 为奇异。故知命题成立。

如上所述，若 μ_s 是关于 m 不为奇异。对于 μ_s，作上面的 $\alpha>0$ 及 $E_0\in\mathfrak{B}(m(E_0)>0)$，則对于 $h(x)=\alpha c_{E_0}(x)$，将有 $\mu_s\geq\mu_h^m$，$\mu_h^m(X)=\alpha m(E_0)>0$。从而有 $\mu=\mu_f^m+\mu_s\geq\mu_{f+h}^m$，$\mu_{f+h}^m(X)=M+\alpha m(E_0)>M$，得出矛盾，所以 μ_s 必須为奇异。 証毕

以上假定 m 是 $\mathfrak{B}$ 上的有界测度。当 m 为准有界时，定理仍然成立。

茲考虑 $X=[0,1]$，$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^1$，$m=m_1$ 的特殊情形。設 $\mu\geq0$ 为 $\mathfrak{B}$ 上的完全加法集合函数，則它一定是 $\mathfrak{B}$ 上的有界测度，从而 μ 可表为某一函数 $F(x)$ $(0\leq x\leq1)$ 的 1 次 Lebesgue-Stieltjes 测度。

$(F(x)=0\ (x\leqslant 0),\ F(x)=M\ (x>1)$.）这时

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+F_1(x)$$

唯一分解为关于 m_1 可积的可测函数 $f(t)$ 与关于 m_1 为奇异的函数 $F_1(x)$（即 $F_1(x)$所确定的 Lebesgue-Stieltjes 测度关于 m_1 为奇异）的和。若 $F_1(x)$为单调增加函数，那末 $F_1(x)$唯一分解为連續函数 $F_2(x)$ 与梯形函数 $F_3(x)$ 的和：$F_1(x)=F_2(x)+F_3(x)$。至于 $F_2(x)$为連續而又奇异的情形，可看下面的例。

例 已知Cantor集合C的测度$m(C)=0$.兹定义 $F_2(x)=1/2, x\in[1/3, 2/3]$; $F_2(x)=1/4,\ x\in[1/9,\ 2/9]$; $F_2(x)=3/4,\ x\in[7/9,\ 8/9]$; …，設 $F_2(x)$ 在 $x\in X-C$ 上已定义妥貼，从而 $F_2(x)$ 可以扩充为 X 上的連續函数。因对 $F_2(x)$ 确定的测度 μ_2; 有 $\mu_2(X-C)=0$，从而知 μ_2 是关于 m_1 为奇异的。

設 $X=R$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^1$, $m=m_1$. 并設 μ 为 $\mathfrak{B}$ 上的絕对連續函数的完全加法集合函数，如果表达式

$$\mu(E)=\int_E f(x)dm$$

成立，则 $f(x)$是唯一确定的(对于等价类而言)。事实上，若置

$$F(x)=\int_0^x f(t)dm \qquad (-\infty<x<\infty),$$

则可証明 $F(x)$为几乎处处可微，而且几乎处处有

$$f(x)=\frac{dF}{dx}.$$

兹考慮 $X=R^n$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^n$, $m=m_n$ 的情形，若取以点 $x=(x_1, \cdots, x_n)\in R^n$ 为中心，以 2ε 为边长的正立方体 $I_\varepsilon=[x_1-\varepsilon, \cdots, x_n-\varepsilon;\ x_1+\varepsilon, \cdots, x_n+\varepsilon]$，则对于完全加性集合函数 μ，几乎处处存在着

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu(I_\varepsilon)}{(2\varepsilon)^n}=g(x).$$

而且 $g(x)$可測(关于 $\mathfrak{B}^n$)，并可积(关于 m)，若 μ 关于 m 为絕对連續，则有

$$\mu(E)=\int_E g(x)dm.$$

反之，若关于可积函数 $g(x)$作 $\mu=\mu_g^m$，那末 μ 的微分与 g 几乎处处一致。这

样絕对連續的完全加性集合函数 μ 与可积的可測函数的关系是以积分与微分的关系成为非常好的 1-1 对应。在 1 維的情形下，証明比較簡单，但在 2 維情形下，就必須用 Vitali 复盖定理。証明从略，讀者可参看高木[3]，河田[4]。

参 考 书

[1] 中山 正，集合·拓扑·代数系(至文堂)。
[2] 河野伊三郎，位相空間論(共立出版社)。
[3] 高木貞治，解析概論(岩波书店)。
[4] 河田敬义，积分論(东海书房)。
[5] N. Bourbaki, Topologie générale (Actualités Sci. Ind), 858 (1940), 916 (1942), 1029 (1947), 1045 (1948), 1084 (1949).
[6] J. L. Kelley, General topology (1955).
[7] P. R. Halmos, Measure theory (1950).

2085

校后記

夏道行

集合理論、拓扑空間理論（特别是关于距离空間）已經成为近代数学中許多部門的基础。如泛函分析、微分方程、統計数学、函数論、代数、几何学、拓扑学等数学分支中許多概念及基本理論的建立都必需借助于集合論及拓扑空間論。

測度論和积分論是近代数学分析中的基础理論，特别是泛函分析、統計数学和群上的調和分析不能脫离一般集上的測度論和积分論，其余如函数論、微分方程也經常要用到欧几里得空間上的測度論和积分論。

本书簡明扼要地介紹了集合論、拓扑空間（包括距离空間）論中的基本概念和一些常用的定理，較系統地但簡洁地介紹了測度論和积分論。讀者在学习了本书以后，基本上具备了进一步学习近代数学各分支时所需的关于这几方面的基础知識。

本书中有一些定理沒有写出証明或証明写得很簡单，书中附的問題有一些是比較重要的但是較难，这是岩波讲座的特点。这对希望所学的內容能一目了然而且可以少化劳力的讀者来說，当然不会感到方便，但是对于那些喜欢自己多想一想的讀者来說却是一本很适宜的书。

目前我国高等学校数学专业都設置了泛函分析或实函数論課程，这本书可以作为这种課程的很好的参考书。

集合論、拓扑空間論、測度論和积分論本身也是近代数学的独立分支，讀者如果需要这几方面的更加专門的知識，可以参考 Hausdorff 的集論，关肇直的拓扑空間概論，Halmos 的測度論，

Sakes 的积分論等书。本书显然不是为了滿足这种需要而写的,但是仍然可以作为进一步学习那些专門著作的阶梯。

下面就本书各章的具体内容作进一步介紹。

在第 1 章中,除叙述了一般书上常見的集合的运算,映象,可数集等概念外,还介紹了直积集合的概念,这是探討拓扑空間及测度空間时必需的。又介紹了抽象代数中常用的等价关系及商集合的概念,这是数学中一个重要的抽象方法。例如 J Mikusinski 等,引入广义函数理論时就是用这种方法(參見[9])。对于序的結构及格的概念也作了簡单的介紹,这方面的理論可参看 [10](由[4]中也可以看出序的概念与分析的更深入的关系)。最后介紹了 Zorn 引理,以代替超限归納法,它是泛函分析及抽象代数中常用的引理。关于 Zorn 引理、Zormelo 公理和 Cantör 公理的等价性的証明除作者指出的日文书外,对我国讀者来說可能 [10] 参考起来更加方便。在第 1 章中关于基数介紹得較少;甚至沒有介紹連續集的基数及其他一些重要的不可数集,可能是一个缺陷,讀者可参看[8],[2],[5]。

在第 2 章中作者首先利用邻域的概念来介紹拓扑;这是較易入手的,但讀者最好也了解一下另外一种介紹拓扑的 Kuratowski 的閉包公理(見[3][11])。对于拓扑空間中的重要的基本概念:直积拓扑空間,連續集合,Hausdorff 空間,正規空間及緊集,局部緊集等都以簡洁的方法进行介紹,而且讲述了許多重要的性质,又介紹了常用的 Урысон 的輔理,Tietze 定理,Тихонов 定理等,并对这些定理采用了較新的、簡洁的証明,可以使讀者易于掌握。但在分析(例如广义函数論)中应用越来越多的局部凸的綫性拓扑空間理論未能涉及,讀者可参看[13],[14]。此外,对一致拓扑空間,完备性、列緊集等可能也是紧接着本章內容的对讀者有用的概念,可以参看[3],[11]。

第3章介紹了最常用的一种拓扑空間——距离空間。除去距离空間的基本性质外，介紹了重要的距离空間完备化定理，但証明不够詳細，初学的讀者可以参看[6]。距离空間中具体的例子还不够多，关于某些具体的距离空間中的稠密集討論較少，可参看[1]，[6]。另外，关于可分距离空間許多性质的較深入的探討可参看[6]。本章中对距离空間中的紧集的性质及一致拓扑作了較多的討論，并且介紹了关于完备距离空間的一个重要的 Baire 定理。

第4章介紹了 Lebesgue 式測度，測度的扩張和直积測度空間等理論，內容紧湊，可以使讀者很容易得到要領，这是比 Halmos 的測度論写得較好的地方。但讀者如需掌握欧几里得空間中的測度的一些更具体的理論，如 Vitali 定理等可参看 [2]，[5]。如果讀者进一步学习泛函分析或抽象的調和分析，应該知道局部紧空間上的測度理論，可参看[5]。

在第5章积分論中，介紹了引入 Lebesgue 式积分的三种方法，这可以使讀者进行比較而有所启发。本书对于 Lebesgue 式积分的建立也很紧湊，也是本章写得較好的地方。另外，对 Jordan 分解，Hahn 分解和 Radon-Nikodym 定理的介紹也采取了較新的方法，使讀者易于掌握其証明的实质。但对于欧几里得空間上的理論，例如可測函数的构造，Baire 函数类的构造，微分与积分的关系沒有涉及，讀者可参看[2]，[5]。

参考书

[1] 复旦大学数学系編：泛函分析，上海科学技术出版社，1960。
[2] 陈建功著：实函数論，科学出版社，1958。
[3] 关肇直編著：拓扑空間概論，科学出版社，1958。
[4] 关肇直編：泛函分析讲义，高等教育出版社，1958。
[5] И. П. Натансон：实变函数論，徐瑞云譯，高等教育出版社。
[6] Л. А. Люстерник, В. Н. Соболев：泛函数分析概要，楊从仁譯，科学

出版社，1955.
[7] P. R. Halmos: 测度論，王建华譯，科学出版社，1958.
[8] F. Hausdorff: 集論，張文良等譯，科学出版社，1960.
[9] J. Mikusinski. R. Sikorski: 广义函数的基本理論，复旦大学泛函分析組譯，人民教育出版社，1960.
[10] G. Birkhoff: Lattice Theory, AMS, 1948.
[11] J. L. Kelley: General Topology, Van Nostrand, 1955.
[12] S. Sakes: Theory of Integral, Hafner, 1937.
[13] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов: Обобщенные функции, II, Физматгиз, 1960.
[14] N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques.